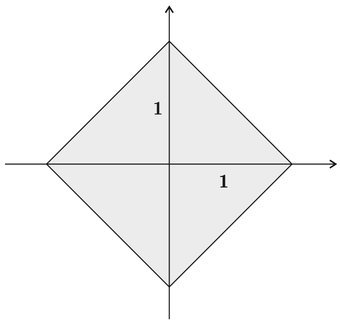
1. Übungsblatt - Jordan-Volumen
Mehrfachintegrale
im WS 2016/2017 bei PD Dr. E. Scheidegger

Abgabe Freitag, den 13.1.15
bis 14 Uhr in die Postkästen

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die
Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Aufgabe 1: Flächenberechnung (2+2+1 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass



Jordan-messbar ist. Bestimmen Sie die Fläche, indem Sie die Grenzwerte für das innere und äußere Maß explizit berechnen.

(b) Es sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar im Sinne der Analysis I/II mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [0,1]$.
Zeigen Sie, dass $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,1], y \in [0, f(x)]\}$ Jordan-messbar ist mit $\mathrm{vol}^2(A) = \int_0^1 f(x)\, dx$.

(c) Ist jede endliche Teilmenge in $\mathbb{R}^2$ Jordan-messbar? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

Aufgabe 2: Vereinigung Jordan-messbarer Mengen (1+1+2 Punkte)

Es seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$ Teilmengen. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $\overline{A \cup B} \setminus (A \cup B)^\circ \subset (\overline{A} \setminus \mathring{A}) \cup (\overline{B} \setminus \mathring{B})$;

(b) Die Vereinigung von zwei Jordan-messbaren Mengen ist Jordan-messbar.

(c) Für die Vereinigung gilt die Volumenformel

$$\mathrm{vol}^n(A \cup B) = \mathrm{vol}^n(A) + \mathrm{vol}^n(B) - \mathrm{vol}^n(A \cap B).$$

Bitte wenden

Aufgabe 3: Jordan-Volumen und Jordan-Nullmengen (2+2 Punkte)

(a) Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und $N \subset \mathbb{R}^n$ eine Jordan-Nullmenge. Zeigen Sie: Ist $B \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge, so dass $A \setminus N \subset B \subset A \cup N$ gilt, dann ist B Jordan-messbar und $\mathrm{vol}^n(B) = \mathrm{vol}^n(A)$

(b) Zeigen Sie, dass jede beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, die höchstens endlich viele Häufungspunkte besitzt, eine Jordan-Nullmenge ist.

Aufgabe 4: (2+2 Punkte)

Wir wollen die erste Aufgabe ausbauen:

(a) Zeigen Sie, dass sogar jedes Dreieck in $\mathbb{R}^2$ Jordan-meßbar ist und sein Jordan-Volumen mit dem üblichen elementargeometrischen Volumen übereinstimmt.

(Hinweis: da wir den Begriff 'elementargeometrisches Volumen' nie präzise definiert haben, wird ein solcher Beweis notwendigerweise etwas geometrische Intuition erfordern - dies soll hier erlaubt sein.)

(b) Folgern Sie: Die abgeschlossene Kreisscheibe von Radius $r > 0$ in $\mathbb{R}^2$ ist Jordan-meßbar und ihr Jordan-Volumen muss πr^2 sein.

(Hinweis: Dreiecke und Aufgabe 2)