2. Übungsblatt - Riemann-Integral

Mehrfachintegrale

im WS 2016/2017 bei PD Dr. E. Scheidegger

Abgabe Freitag, den 20.1.15
bis 14 Uhr in die Postkästen

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die
Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Aufgabe 1 - Volumenänderungen durch lineare Abbildungen (1+1+1+1 Punkte)

Sei $L \in Mat(n \times n, \mathbb{R})$ und $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar. Zeigen Sie, dass dann auch $LA := \{Lx \mid x \in A\} \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar ist mit $\operatorname{vol}^n(LA) = |\det(L)| \operatorname{vol}^n(A)$.
Gehen Sie dazu vor wie folgt:

(a) Zeigen Sie die Behauptung für den Fall, dass L nicht invertierbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass sich das Volumen jedes Würfels $W \in \mathcal{W}_k^n$ um den gleichen Faktor α_L ändert. Folgern Sie daraus, dass sich auch das Volumen jeder Jordan-messbaren Menge B um den gleichen Faktor α_L ändert.

(c) Zeigen Sie die Behauptung für den Fall, dass L eine orthogonale Matrix ist. (Hinweis: wenn Sie möchten, dürfen Sie hier Aufgabe 2 benutzen)

(d) Zeigen Sie die Behauptung für den Fall, dass L eine invertierbare Diagonalmatrix ist.

Der allgemeine Fall folgt dann daraus, dass sich jede invertierbare Matrix darstellen lässt als Produkt einer Diagonalmatrix mit orthogonalen Matrizen.

Aufgabe 2: Jordan-Messbarkeit der Einheitskugel (2+1+1 Punkte)

(a) Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $m \geq 1$ und $F : K \to \mathbb{R}^m$ stetig. Wir betrachten den Graph

$$\operatorname{graph}(F) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \;\middle|\; x \in K, y = F(x) \right\}$$

Zeigen Sie, dass $\operatorname{graph}(F)$ eine Jordan-Nullmenge ist.

(b) Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und es sei $v \in \mathbb{R}$ ein regulärer Wert von f, so dass $A = f^{-1}((-\infty, v])$ beschränkt ist. Zeigen Sie, dass A dann Jordan-messbar ist. Hinweis: Benutzen Sie den Satz vom regulären Wert beziehungsweise den Satz über implizite Funktionen.

(c) Folgern Sie, dass die Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$ Jordan-messbar ist.

Bitte wenden

Aufgabe 3 - Gewichtete Integration (4 Punkte)

Analog zum Riemann-Integral betrachten wir zwei Operationen, die geeigneten Teilmengen $A \subset \mathbb{R}^n$ und Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Zahl in $\mathbb{R}$ zuordnen:

(a) Für Punkte $x_1, \ldots, x_N \in \mathbb{R}^n$ und reelle Zahlen $r_1, ..., r_N \geq 0$ definieren wir *die gewichtete Summe über* A als $\mathcal{F}_A(f) = \sum_{i=1}^N r_i(\mathbf{1}_A \cdot f)(x_i)$.

(b) Für eine stetige und beschränkte Funktion $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ nennen wir f *gewichtet integrierbar über* A mit $\mathcal{G}_A(f) = \int_{\mathbb{R}^n} (\mathbf{1}_A \cdot \rho \cdot f)(x) d^n x$, wenn das Integral exisiert.

Zeigen Sie für a) *oder* b), dass die Eigenschaften (1) bis (4) aus Proposition 2.3 gelten.

Aufgabe 4 - Additivität und Teilmengen (2+2 Punkte)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Es sei f Riemann-integrierbar über $C \subset \mathbb{R}^n$ und $A \subset C$ sei Jordan-messbar, dann ist f auch integrierbar über A. *Hinweis: Benutzen Sie Proposition 1.4 und 2.5 aus der Vorlesung*

(b) Es sei f Riemann-integrierbar über Jordan-messbare Mengen A und B, dann ist f auch integrierbar über $A \cap B$ und $A \cup B$, und es gilt

$$\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f - \int_{A \cap B} f$$