3. Übungsblatt
Parameterintegrale
Mehrfachintegrale
im WS 2016/2017 bei PD Dr. E. Scheidegger

Abgabe Freitag, den 27.1.17
bis 14 Uhr in die Postkästen

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die
Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Aufgabe 1 - Integralsätze (1+2+1 Punkte)

Sei A eine Jordan-messbare Menge und $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ auf der Menge A Riemann-integrierbar.

(a) Wir setzen $f_* = \inf_A f$ und $f^* = \sup_A f$. Zeigen Sie, dass dann die Ungleichung gilt: $f_* \cdot \mathrm{vol}^n(A) \leq \int_A f(x)\, d^n x \leq f^* \cdot \mathrm{vol}^n(A)$.

(b) Zeigen Sie den folgenden Mittelwertsatz: Nimmt f jeden Wert zwischen f_* und f^* an, dann existiert $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $\int_A f(x) d^n x = f(x_0) \cdot \mathrm{vol}^n A$

(c) Zeigen Sie die folgende Abschätzung für das Integral: Falls $|f(x)| < M$ für alle $x \in A$, dann gilt $|\int_A f(x) d^n x| \leq M \cdot \mathrm{vol}^n A$.

Aufgabe 2 - Physik eines Quaders (4 Punkte)

Der Trägheitstensor eines Körpers K mit Dichte $\rho(x, y, z)$ ist definiert als das komponentenweise Integral

$$\int_K \rho(x,y,z) \begin{pmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie Masse, Schwerpunkt und Trägheitstensor des Quaders

$$K = [-a, a] \times [-b, b] \times [-c, c] \subset \mathbb{R}^3$$

mit konstanter Dichte $\rho(p) = 1$ für alle Punkte $p \in K$.
Hinweis: Begründen Sie zunächst, dass es ausreicht, für den Schwerpunkt eines der drei und für den Trägheitstensor zwei der neun einzelnen Integrale auszurechnen.

Bitte wenden

Aufgabe 3 - Einige uneigentliche Integrale (1+1+1+1 Punkte)

(a) Berechnen Sie das Integral der Funktion $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$ über Kreisscheiben B_R^2 für $R > 0$, und schätzen Sie damit das Integral von $f(x,y)$ über Quadrate $W_R^2 = [-R,R]^2$ nach oben und unten ab.

(b) Benutzen Sie a), um zu zeigen, dass $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$.

(c) Wir definieren die Gammafunktion als Parameterintegral mit $\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$. Zeigen Sie die Funktionalgleichung $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$ und folgern Sie für $n \in \mathbb{N}$, dass $\Gamma(n+1) = n!$.

(d) Zeigen Sie, dass $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Aufgabe 4 - Volumen von Kugeln (4 Punkte)

Berechnen Sie das Volumen der n-dimensionalen Kugel mit Radius R per Induktion nach der Dimension von n nach $n+2$. Die Werte für $n = 1, 2$ dürfen als bekannt vorausgesetzt werden.

Hinweis: Anwendung einer Folgerung aus dem Satz von Fubini.

Anregung: Wenn Sie möchten, können Sie Ihre Antwort mittels der Gammafunktion aus Aufgabe 3 in eleganter Form formulieren.