4. Übungsblatt
Transformationsformel
Mehrfachintegrale
im WS 2016/2017 bei PD Dr. E. Scheidegger

Abgabe Freitag, 3.2.2017 bis 14 Uhr in die Postkästen

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Aufgabe 1 - Welche Koordinaten? (1+3 Punkte)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ das von den Vektoren

$$v := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad w := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

aufgespannte Parallelogramm.

(a) Skizzieren Sie die Menge Ω.

(b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_\Omega 12x \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

durch Verwendung einer geeigneten Koordinatentransformation.

Aufgabe 2 - Integrale über Kugeln (4 Punkte)

Betrachten Sie die Abbildung

$$F : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi) \to \mathbb{R}^3$$
$$(r, \varphi, \psi) \mapsto (r\cos(\varphi)\sin(\psi), r\sin(\varphi)\sin(\psi), r\cos(\psi))$$

(a) Bestimmen Sie das Bild $\mathrm{im}(F)$.

(b) Bestimmen Sie die Jacobi-Determinante $|\det dF(r, \varphi, \psi)|$.

(c) Zeigen Sie, dass $F : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi) \to \mathrm{im}\, F$ ein Diffeomorphismus ist. Geben Sie die Umkehrabbildung an.

(d) Für welche $a \in \mathbb{R}$ existiert das uneigentliche Integral

$$\int_{B_R(0)} (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{a}{2}} \, dxdydz?$$

Berechnen Sie es gegebenenfalls mit den oben angegebenen Koordinaten.

Aufgabe 3 - Variationen von Kugel-Integralen (1+3 Punkte)

(a) Berechnen Sie das Volumen eines Ellipsoids, d.h. einer Menge der Form

$$A := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leq 1 \right\},$$

wobei $a, b, c > 0$ beliebige Konstanten sind.

(b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion. Bestimmen Sie eine allgemeine Formel, um Integrale der Form

$$\int_{B_R(0)} f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z \tag{1}$$

zu berechnen, d.h. Integrale über eine Kugel von Radius R, deren Integrand nur vom Radius abhängt.

Aufgabe 4 - Zylinder (4 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} F : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r, \varphi, z) &\longmapsto (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z). \end{aligned}$$

(a) Fertigen Sie eine Skizze an, die das Bild von $(0, 1) \times (0, \pi) \times (0, 1)$ unter F im $\mathbb{R}^3$ veranschaulicht.

(b) Berechnen Sie das Volumen der Menge $F(X)$, wobei X durch die Ungleichungen

$$\begin{aligned} 0 \leq r \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq r \cos \varphi \end{aligned}$$

gegeben ist.