

## Übungsblatt 1

### Geometrie elliptischer Kurven im projektiven Raum

#### 1. Glattheit ebener projektiver Kurven

- (a) (1 Punkt) Es sei  $k$  ein Körper der Charakteristik 0. Sei  $\widehat{F}(x, y, z) \in k[x, y, z]$  homogen vom Grad  $d$ . Beweisen Sie die Eulersche Gleichung

$$x \frac{\partial \widehat{F}}{\partial x} + y \frac{\partial \widehat{F}}{\partial y} + z \frac{\partial \widehat{F}}{\partial z} = d \widehat{F}.$$

- (b) (1 Punkt) Es sei  $C$  die Kurve  $\{(x, y) \in k^2 \mid F(x, y) = 0\}$  und  $\widehat{C}$  ihr projektiver Abschluss. Zeigen Sie, daß  $\widehat{C}$  im Punkt  $(x_0 : y_0 : z_0)$  genau dann singularär ist, wenn gilt:

$$\frac{\partial \widehat{F}}{\partial x}(x_0 : y_0 : z_0) = \frac{\partial \widehat{F}}{\partial y}(x_0 : y_0 : z_0) = \frac{\partial \widehat{F}}{\partial z}(x_0 : y_0 : z_0) = 0.$$

- (c) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß die Bedingung für einen singulären Punkt in Aufgabe (b) unabhängig von der Wahl der Koordinaten ist, d.h. sie ist unverändert nach einem Koordinatenwechsel  $(x' : y' : z') = (x : y : z)A$ , wobei  $A \in \text{GL}(3, k)$ , wobei  $A$  durch Rechtsmultiplikation auf den Vektor  $(x, y, z) \in k^3$  wirkt.
- (d) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß eine Tangente an  $\widehat{C}$  durch einen glatten Punkt  $(x_0 : y_0 : z_0)$  die Gleichung  $ax + by + cz = 0$  erfüllt, wobei

$$a = \frac{\partial \widehat{F}}{\partial x}(x_0 : y_0 : z_0), \quad b = \frac{\partial \widehat{F}}{\partial y}(x_0 : y_0 : z_0), \quad c = \frac{\partial \widehat{F}}{\partial z}(x_0 : y_0 : z_0),$$

indem Sie die Tangentenbedingung für  $C$  homogenisieren.

#### 2. Wendepunkte ebener projektiver Kurven

- (a) (1 Punkt) Es seien  $P_1 = (x_1 : y_1 : z_1)$  und  $P_2 = (x_2 : y_2 : z_2)$  zwei verschiedene Punkte im  $\mathbb{P}_k^2$ . Zeigen Sie, daß die Gerade  $L = \overline{P_1 P_2} \subset \mathbb{P}_k^2$ , die  $P_1$  und  $P_2$  verbindet, wie folgt parametrisiert werden kann:  $L = \{sP_1 + tP_2 \mid (s : t) \in \mathbb{P}_k^1\}$ . Zeigen Sie, daß die Abbildung  $\phi : \mathbb{P}_k^1 \rightarrow L, (s : t) \rightarrow sP_1 + tP_2$  bijektiv ist.

- (b) (2 Punkte) Es sei  $k = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ . Wenn die Kurve  $\{F(x, y) = 0\}$  aus Aufgabe 1 im Punkt  $P_1 = (x_1, y_1)$  glatt ist und eine nicht-vertikale Tangente besitzt, dann kann die implizite Funktion  $y = f(x)$  in eine Taylor-Reihe um  $x = x_1$  entwickelt werden. Der lineare Term gibt die Tangente. Wenn wir den linearen Term subtrahieren, erhalten wir:

$$f(x) - y_1 - f'(x_1)(x - x_1) = a_m(x - x_1)^m + \dots, \quad a_m \neq 0.$$

$m$  heisst die Ordnung der Tangente. Der Punkt  $(x_1, y_1)$  heisst Wendepunkt wenn  $m > 2$ , d.h.  $f''(x_1) = 0$ . Es seien  $P_1 = (x_1 : y_1 : z_1) \in \mathbb{P}_k^2$ ,  $z_1 \neq 0$ ,  $P_2 = (x_2 : y_2 : z_2) \in \mathbb{P}_k^2$ . Weiter sei  $L = \overline{P_1 P_2}$  eine Tangente an die Kurve  $F(x, y) = \widehat{F}(x, y, 1)$  im glatten Punkt  $P_1$ . Zeigen Sie, dass  $m$  die niedrigste Potenz von  $t$  in  $\widehat{F}(x_1 + tx_2, y_1 + ty_2, z_1 + tz_2) \in k[t]$  ist.

- (c) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß  $m$  sich unter linearen Koordinatenwechseln von  $\mathbb{P}_k^2$  (wie in Aufgabe 1(c)) nicht ändert.

### 3. Tangente im Unendlichen einer elliptischen Kurve

(4 Punkte) Zeigen Sie, daß die Gerade im Unendlichen  $L = \{z = 0\} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  eine Tangente an die elliptische Kurve  $E = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^2 = f(x)\}$  im Punkt  $(0 : 1 : 0)$  ist, und dass  $(0 : 1 : 0)$  ein Wendepunkt von  $E$  ist.

### 4. Die projektive elliptische Kurve als Mannigfaltigkeit

Wir betrachten den komplex-projektiven Raum  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ .

- (a) (2 Punkte) Zeigen Sie, daß  $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i=0}^n$  mit  $U_i = \{z = (z_0 : \dots : z_n) \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n \mid z_i \neq 0\} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$  und  $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}^n, z \mapsto (\xi_0^{(i)}, \dots, \widehat{\xi_i^{(i)}}, \dots, \xi_n^{(i)})$  ein wohldefinierter holomorpher Atlas ist, wobei  $\xi_j^{(i)}(z) = z_j/z_i$  und  $\widehat{\xi_i^{(i)}}$  bedeutet, dass  $\xi_i^{(i)}$  weggelassen wird. Bestimmen Sie die Übergangsfunktionen  $\psi_{ji} = \varphi_j \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$ .
- (b) (1 Punkt) Es sei  $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  die Riemannsche Zahlenkugel. Zeigen Sie, daß gilt:  $\overline{\mathbb{C}} \cong \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ . Betrachten Sie dazu die stereographische Projektion.
- (c) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß eine elliptische Kurve  $E$  eine komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension 1 ist. Zeigen Sie dazu, daß  $\{(U_i \cap E, \varphi_i|_E)\}_{i=0,1,2}$  mit  $(U_i, \varphi_i)$  aus Aufgabe (a) als Atlas geeignet ist. Alternativ zeigen Sie mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen, daß  $E$  eine Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  ist.

Abgabetermin: Dienstag, 24. 10. 2017 um 10:00 Uhr.