

## Übungsblatt 2

### Elliptische Funktionen und Periodenintegrale

5. Die Weierstraß'sche  $\wp$ -Funktion als doppelte Überlagerung  $\mathbb{C}/L \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ .
- (a) (1 Punkt) Es sei  $u \in \mathbb{C}$  fest. Zeigen Sie, daß die elliptische Funktion  $\wp - u$  genau zwei Nullstellen (oder eine doppelte Nullstelle) hat.
  - (b) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß die Nullstellen der Funktion  $\wp'$  genau  $\omega_1/2$ ,  $\omega_2/2$ , und  $(\omega_1 + \omega_2)/2$  sind. Geben Sie eine Charakterisierung der Nullstellen von  $\wp'$  an, die unabhängig von der Wahl der Basis von  $L$  ist, d.h. unabhängig von den Perioden  $\omega_1, \omega_2$  ist.
  - (c) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß  $e_1, e_2, e_3$  genau die Werte von  $u$  sind, für die  $\wp - u$  eine doppelte Nullstelle hat.
  - (d) (1 Punkt) Warum sind  $e_1, e_2$  und  $e_3$  voneinander verschieden?

6. Analytische Fortsetzung der Umkehrfunktion von  $\wp$ .

Es seien  $L = \langle \omega_1, \omega_2 \rangle_{\mathbb{Z}}$  ein festes Gitter und  $g_2 = g_2(L)$ ,  $g_3 = g_3(L)$ ,  $\wp(z) = \wp(z; L)$ . Weiter sei  $R_1 \subset \mathbb{C} \setminus \{e_1, e_2, e_3\}$  ein Elementargebiet, welches nicht die Nullstellen  $e_1, e_2, e_3$  der Kubik  $f(x) = 4x^3 - g_2x - g_3$  enthält. Für  $u \in R_1$  definieren wir die Funktion

$$z = g(u) = \int_u^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{f(t)}},$$

wobei ein fester Zweig der Quadratwurzel gewählt wird, wenn sich  $t$  in  $R_1$  ändert. Diese Funktion ist unabhängig vom Weg in  $R_1$  von  $u$  nach  $\infty$ . Sie kann wie folgt analytisch fortgesetzt werden: Wir wählen ein Elementargebiet  $R_2$  von  $\mathbb{C} \setminus \{e_1, e_2, e_3\}$  mit  $R_1 \cap R_2 \neq \emptyset$  und setzen für  $u \in R_2$

$$z = g(u) = g(u_1) + \int_u^{u_1} \frac{dt}{\sqrt{f(t)}}, \quad u_1 \in R_1 \cap R_2.$$

Diese Definition ist unabhängig von der Wahl von  $u_1 \in R_1 \cap R_2$  und des Weges von  $u$  nach  $u_1$ . Indem wir so fortfahren, erhalten wir eine mehrwertige analytische Funktion, da die Folge der Mengen  $R_1, R_2, \dots$  die Punkte  $e_1, e_2, e_3$  umlaufen kann.

(a) (1 Punkt) Drücken Sie  $\left(\frac{dz}{du}\right)^2$  und  $\left(\frac{du}{dz}\right)^2$  durch  $u$  aus.

(b) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß  $u = \wp(z)$ .

Hinweis: Wenn die Funktion  $z = g(u)$  die Punkte  $e_1, e_2$ , oder  $e_3$  umläuft, kann sich ihr Wert nur um ein Element in  $L$  ändern. Also ist sie in  $\mathbb{C}/L$  wohldefiniert und setzt sich stetig nach  $e_1, e_2, e_3$  fort.

(c) (1 Punkt) Es sei  $\gamma_1$  der Weg in der komplexen  $u$ -Ebene von  $e_2$  nach  $\infty$ , der von  $u = \wp(z)$  durchlaufen wird, wenn  $z$  von  $\omega_2/2$  nach 0 entlang der Kante des Fundamentalparallelogramms läuft. Zeigen Sie, daß für einen geeigneten Zweig der Quadratwurzel gilt:

$$\int_{\gamma_1} \frac{dt}{\sqrt{f(t)}} = -\frac{\omega_2}{2}.$$

(d) (1 Punkt) Es sei  $\gamma_2$  der Weg, der von  $\infty$  nach  $e_2$  entlang  $\gamma_1$  führt, sich dann einmal um  $e_2$  windet und entlang  $\gamma_1$  nach  $\infty$  zurück geht. Nehmen Sie den gleichen Zweig wie in (c) und zeigen Sie, daß gilt:

$$\int_{\gamma_2} \frac{dt}{\sqrt{f(t)}} = \omega_2.$$

## 7. Allgemeine Periodenintegrale

Es gelten dieselben Bezeichnungen wie in Aufgabe 6.

(a) (1 Punkt) Beschreiben Sie, wie die Funktion  $z = g(u)$  alle Urbilder von  $u$  unter  $u = \wp(z)$  geben kann.

(b) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß alle Wurzeln  $e_1, e_2, e_3$  genau dann reell sind, wenn  $g_2, g_3$  reell sind und  $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 > 0$ .

(c) (1 Punkt) Nehmen Sie an, daß die Bedingungen in (b) erfüllt sind. Ordnen Sie die  $e_i$  so, daß  $e_2 > e_3 > e_1$ . Zeigen Sie, daß gilt:

$$\frac{\omega_1}{2} = i \int_{-\infty}^{e_1} \frac{dt}{\sqrt{-f(t)}}, \quad \frac{\omega_2}{2} = \int_{e_2}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{f(t)}}$$

Hinweis: Wählen Sie den positiven Zweig und integrieren Sie entlang der reellen Achse.

(d) (1 Punkt) Beschreiben Sie unter dieser Annahme, wie man den Weg der Integration und den Zweig ändern kann, um die anderen Werte von  $z$  mit  $u = \wp(z)$  zu finden, nämlich  $\pm z + m\omega_1 + n\omega_2$  für  $m, n \in \mathbb{Z}$ .

8. Bogenlänge einer Ellipse und elliptische Integrale zweiter Gattung

(4 Punkte) Zeigen Sie, daß die Länge eines Bogens einer Ellipse mit der Gleichung  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , ( $0 < b \leq a$ ) auf ein Integral der Form

$$\int \frac{1 - k^2 x^2}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}} dx$$

führt. Wählen Sie dazu eine geeignete Parametrisierung des Bogens  $\gamma : [p, q] \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Die Bogenlänge ist dann gegeben durch

$$L(\gamma) = \int_p^q \|\dot{\gamma}\| dt.$$

Welche Bedeutung hat dabei  $k$ ?

*Dies ist ein sogenanntes elliptisches Integral zweiter Gattung. Von elliptischen Integralen spricht man allgemein, wenn der Integrand das Produkt einer rationalen Funktion mit einer Quadratwurzel eines Polynoms dritten oder vierten Grades ohne mehrfache Nullstelle ist. Der Begriff "elliptische Funktion" hat seinen historischen Ursprung darin, daß die Berechnung von Ellipsenbögen auf solche Integrale führt.*

Abgabetermin: Dienstag, 7. 11. 2017 um 10:00 Uhr.