Vorbereitung der Klausur zur Vorlesung
Funktionalanalysis SS 2013, Serie 13
Prof. Dr. G. Wang 15.7.2013
Dipl. M Mattuschka

---

(1) Banachräume: $l^p(\mathbb{N})$, $C^k(\Omega)$, $C^{k,\alpha}(\Omega)$, $L^p(\mu)$, $W^{k,p}(\Omega)$ and $W_0^{k,p}(\Omega)$ $(1 \leq p \leq \infty)$

(2). Kompaktheit von Teilmenge:
Kompaktheit, präkompakt, foglenkompakt,,Hein-Borel, Arzela-Ascoli

(3) Dualraum, Darstellungssatz von Riesz für L^p

(4) Satz von Hahn-Banach, Trennungssatz

(5) Hilberträume, Skalarprodukt, Projektiosstaz, Darstellungssatz von Riesz

(6) Der Bairsche Kategoriesatz und Anwendungen,Satz von Banach-Steinhaus, Satz von der offenen Abbildung, Satz von der inversen Abbildung
Satz vom abgeschlossenen Graphen

(7) Schwache Konvergenz und reflexivität

(8) Schwache Ableitungen, Sobolevräume, Satz von Lax-Milgram, Poincare-Ungleichung

(9) Kompaktoperator und Fredholmoperatoren, Index

(10) Spektralstz und ONB

Aufgabe 1.

Sei $U \subset X$ eine dichte Teilmenge in einem normierten Vektorraum, Y ein Banachraum und $A \in L(U, Y)$ ein linearer, beschränkter Operator. Zeigen Sie, dass dann eine eindeutige Fortsetzung $\tilde{A}$ von A auf X existiert, d.h. $\tilde{A} \in L(X, Y)$ mit $\tilde{A}_{|U} = A$. Auerdem gilt $\|\tilde{A}\| = \|A\|$.

Aufgabe 2.

Sei X ein normierter Raum, $n \in \mathbb{N}$ und $\{x_1, \cdots, , x_n\} \subset X$ linear unabhängig. Zeigen Sie: Für jedes $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ gibt es ein $x \in X$ sodass $x(x_i) = \alpha_i$ für alle $1 \leq i \leq n$.

Aufgabe 3.

(i) Geben Sie ein Beispiel für eine schwach konvergente Folge, die nicht stark konvergiert. Beweisen Sie Ihre Behauptungen.

(ii) Sei H ein Hilbertraum, $x \in H$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in H. Zeigen Sie die folgende Äquivalenz: $x_n \to x$ stark in $H \Longleftrightarrow x_n \rightharpoonup x$ schwach in H und $\|x_n\| \to \|x\|$.

Aufgabe 4

(i) Formulieren Sie den Satz vom abgeschlossenen Graphen (ohne Beweis).

(ii) Sei H ein Hilbertraum und $A : H \to H$ linear mit $(v, Aw) = (Av, w)$ für alle $v, w \in H$. Zeigen Sie, dass A stetig ist.

Aufgabe 5.

Seien $f, g \in L^4(\mathbb{R})$. Dann ist $fg \in L^2(\mathbb{R})$, und die lineare Abbildung $T : L^4(\mathbb{R}) \to L^2(R)$, $T(f) = fg$ ist stetig.

Aufgabe 6.

Betrachten Sie die lineare Abbildung

$$T : l^1 \to l^1, \quad x = (s_n) \mapsto \left(\frac{s_{n+1}}{n}\right).$$

Bestimmen Sie die Norm von T , und zeigen Sie, dass T kompakt ist.

Aufgabe 7.

Sei (x_n) eine Folge in einem normierten Raum X, die schwach gegen $x \in X$ konvergiert. Zeigen Sie: Ist stets $\|x_n\| = 1$, so ist $\|x\| \leq 1$.

Geben Sie noch ein Beispiel, wo $\|x\| < 1$ vorkommt.

Aufgabe 8.

(a) Geben Sie die Definition eines abgeschlossenen Operators, und formulieren Sie den Satz vom abgeschlossenen Graphen.

(b) Sei $T : X \to Y$ eine lineare Abbildung zwischen Banachra umen mit folgender Eigenschaft: Konvergiert (x_n) schwach gegen 0, dann konvergiert auch (Tx_n) schwach gegen 0. Zeigen Sie, dass T stetig ist.

Aufgabe 9.

Seien $x_1, x_2, \cdots$ paarweise orthogonale Elemente eines Hilbertraums. Zeigen Sie, dass $\sum_{k=1} x_k$ genau dann konvergiert, wenn $\sum_{k=1} \|x_k\| < \infty$ ist.

Aufgabe 10.

Sei $T : H \to H$ ein selbstadjungierter stetiger Operator auf einem komplexen Hilbertraum. Zeigen Sie:
(a) $\|(T \pm iId)\|^2 = \|T\|^2 + \|x\|^2$ für alle $x \in H$;
(b) $T + iId$ ist ein Isomorphismus mit $\|(T + iId)^{-1}\| \leq 1$.

Aufgabe 11. (Aufgabe 3.2)

Sei $T_n \in L(X, Y)$ eine Folge von Abbildungen eines Banachraumes in einen normierten Raum, so dass für alle $x \in X$ ein $T(x) \in Y$ mit

$$T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$$

existiert. Beweisen Sie, dass $T \in L(X, Y)$ mit $\|T\| \leq \liminf \|T_n\|$ gilt. Konstruieren Sie außerdem eine Folge mit $\|T\| < \liminf \|T_n\|$!

Aufgabe 12. (Aufgabe 3.3)

a) Es sei X ein $\mathbb{K}-$Vektorraum. Zeigen Sie, dass die Dimension von X genau dann endlich ist, wenn alle linearen Abbildungen $f : X \to \mathbb{K}$ beschränkt sind.

b) Sei X ein Banachraum und $M \subset X$. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

1. M ist beschränkt.
2. $\sup\{Ax : x \in M\} < \infty$ für jedes $A \in X'$.

Aufgabe 13 (*Satz von Riesz über kompakte Operatoren*)

Sei $K \in L(X, X)$ ein kompakter Operator und $T = \text{id} - K$. Zeigen Sie
a) $\dim \ker T < \infty$.
b) Sei V das abgeschlossene Komplement von $\ker T$. Dann existiert ein $\mu > 0$, so dass

$$\|Tv\| \geq \mu\|v\| \quad \forall v \in V.$$

c) Bild (T) ist abgeschlossen.
d) $\dim$ (coker T) $< \infty$.
e) T ist Fredholmoperator mit ind $(T) = 0$.

Aufgabe 14

Sei $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$,
$$u(x) = |x|^{-\alpha} \quad \text{für } x \neq 0.$$
Für welche Werte von $\alpha > 0$, n und p gilt $u \in W^{1,p}(\Omega)$?

Aufgabe 15

1. Gelte $\phi_n \to \phi$ schwach* in X^* für $n \to \infty$. Dann folgt
$$\|\phi\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|\phi_n\|.$$

2. Gelte $x_n \rightharpoonup x$ in X für $n \to \infty$. Dann folgt
$$\|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

3. Schwach konvergente und schwach* konvergente Folgen sind beschränkt.

4. Gilt $x_n \to x$ in X und $\phi_n \to \phi$ schwach* in X^* für $n \to \infty$ oder $x_n \rightharpoonup x$ und $\phi_n \to \phi$ (stark) in X^*, so folgt
$$\langle x_n, \phi_n \rangle \to \langle x, \phi \rangle$$
für $n \to \infty$.

Aufgabe 16

Sei Y ein metrischer Raum. Sei $X \subset Y$ kompakt. Dann ist X

1. beschränkt,
2. abgeschlossen sowie
3. separabel.

Aufgabe 17

Sei X ein Banachraum. Dann ist X separabel, falls X^* separabel ist.
Die Umkehrung ist falsch. Geben Sie einen Beispiel.

Aufgabe 18
Alle Hausaufgaben