Übungsaufgaben zur Vorlesung
geometrische Analysis
Prof. Dr. G. Wang
Dipl. M. Mattuschka

WS 2014/2015, Serie 01
20.10.2014

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Die Einheitssphře $\mathbb{S}^m = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} \,|\, x_0^2 + \cdots x_m^2 = 1\}$ mit Radius 1 bilden die stereographischen Projektionen p_N vom Nordpol $N = (1, 0, \cdots, 0)$ und p_S vom Südpol $S = (-1, 0, \cdots, 0)$ aus ein Atlas. Die jeweiligen Kartengebiete sind $U_N = \mathbb{S}^m \backslash N$ bzw. $U_S = \mathbb{S}^m \backslash S$. In Formeln sind p_N und p_S gegeben durch

$$p_N(x) = \frac{1}{1 - x_0}(x_1, \cdots, x_m); \quad p_S(x) = \frac{1}{1 + x_0}(x_1, \cdots, x_m).$$

Berechnen Sie den Kartenwechsel.

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Die projektiven Räume $\mathbb{K}P^n$ mit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$. Nach Definition ist $\mathbb{K}P^n$ die Menge der eindimensionalen $\mathbb{K}$-linearen Unterräume des $\mathbb{K}^{n+1}$. Ein Punkt L in $\mathbb{K}P^n$ ist somit festgelegt durch seine homogenen Koordinaten $L = [x_0, \cdots, x_n]$, wobei $(x_0, \cdots, x_n)$ ein Vektor in $L \backslash \{0\}$ ist. Auf den Mengen

$$U_i = \{[x_0, \cdots, x_n] \in \mathbb{K}P^n \,|\, x_i \neq 0\}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

definieren wir Bijektionen

$$b_i : U_i \to \mathbb{K}^n, \quad b_i([x]) = (x_0 \cdots, \hat{x}_i, \cdots x_n)\frac{1}{x_i}.$$

Man sieht nun leicht, da es genau eine Topologie auf $\mathbb{K}P^n$ gibt, so da die U_i offen und die b_i Homöomorphismen sind für $0 \leq i \leq n$.
i) Berechnen Sie den Kartenwechsel.
ii) Zeigen Sie, dass die kanonische Projektion $\mathbb{K}^{n+1} \backslash \{0\} \to \mathbb{K}, x \mapsto [x]$, glatt ist.
iii) Zeigen Sie, dass für jede invertier Matrix $A \in \mathbb{K}^{n+1} \times \mathbb{K}^{n+1}$ die induzierte Abbildung $\mathbb{K}P^{n+1} \to \mathbb{K}P^{n+1}$, $[x] \to [Ax]$, ein Diffeomorphismus ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Skizzen Sie $\{((R + r\cos v)\cos u, (R + r\cos v)\sin u, r\sin v), \forall 0 \leq u, v < 2\pi\}$, wobei $R, r \in \mathbb{R}$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 27.10.14, vor der Vorlesung**.