Übungsaufgaben zur Vorlesung
Geometrische Analysis — WS 2014/2015, Serie 02
Prof. Dr. G. Wang — 27.10.2014
Dipl.-Math. M. Mattuschka

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Zwei Karten $(x,U),(y,V)$ einer Mannigfaltigkeit M heißen *orientierbar verträglich*, wenn gilt

$$p \in U \cap V \Longrightarrow \det\big(d(y \circ x^{-1})\big)_{x(p)} > 0$$

Die Mannigfaltigkeit M heißt orientierbar, wenn es einen Atlas $\mathcal{A}$ gibt, so dass alle Kartenwechsel orientierbar verträglich sind.
a) Geben Sie zwei Beispiele eines Paares von Karten einer Mannigfaltigkeit an, die eine orientierbar verträglich, die andere nicht.
b) Zeigen Sie, dass für jede differenzierbare Mannigfaltigkeit M das Tangentialbündel TM orientierbar ist.

Aufgabe 2 (8 Punkte)
Es seien M und N Mannigfaltigkeiten und $f : M \to N$ eine (glatte) Abbildung. Ein Punkt $p \in M$ heißt regulärer Punkt von f, falls df_p surjektiv ist. Weiterhin heißt $q \in N$ regulärer Wert, falls alle $p \in f^{-1}(q)$ reguläre Punkte sind.
a) Zeigen Sie, dass $f^{-1}(q)$ lokal Euklidisch ist, wenn q ein regulärer Wert von f ist. (Tipp: Satz für implizite Funktionen.)
b) Ist $f^{-1}(q)$ eine Mannigfaltigkeit? Falls ja, welche Dimension hat sie?
c) Ist die Einheitsmatrix E ein regulärer Wert der folgenden Abbildung?

$$f : R^{n\times n} \to \mathrm{Sym}(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^T = A, \quad A \mapsto A^T A\}.$$

Was sagt dies über die orthogonale Gruppe $O(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^T A = E\}$ aus?

Aufgabe 3 (*Polarkoordinaten*) (8 Punkte)
Betrachten Sie die Mannigfaltigkeit $M := \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$, sowie den Punkt $p = (1,0) \in M$. Gegeben seien zwei Karten um p: Einerseits die Karte $(x := id, M)$ und andererseits die Karte $(y, (0,\infty) \times \mathbb{R}$, so dass

$$y^{-1} : (0;1) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to M, \quad y^{-1}(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi).$$

a) Wie lautet die Standardbasis $\{X_1, X_2\}$ bzgl. x?
b) Was ist die Standardbasis $\{Y_1, Y_2\}$ bezüglich y in p? Drücken Sie diese in Termen von X_1 und X_2 aus.
c) Berechnen Sie die Kartenwechsel $x \circ y^{-1}$ und $y \circ x^{-1}$.
d) Berechnen Sie das Dierential $d(x \circ y^{-1})_{y(p)}$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 3.11.14, vor der Vorlesung**.