Übungsaufgaben zur Vorlesung
geometrische Analysis — WS 2014/2015, Serie 03
Prof. Dr. G. Wang — 3.11.2014
Dipl. Math. M. Mattuschka

Aufgabe 1 (*Lie-Gruppe*) (6 Punkte)
(a) Zeigen Sie, dass die Gruppe $SL(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : \det(A) = 1\}$ eine reguläre Untermannigfaltigkeit des $R^{n\times n}$ ist. Also ist $SL(n,\mathbb{R})$ eine Mannigfaltigkeit.
(b) Zeigen Sie für die Gruppe $G = SL(n,\mathbb{R})$, dass die Gruppenmultiplikation, sowie die Inversenbildung

$$\mu : G \times G \to G, \quad (A,B) \mapsto AB, \qquad \nu : G \to G, \quad \mapsto A \to A^{-1}$$

dierenzierbare Abbildungen sind.
B*emerkung*: Differenzierbare Mannigfaltigkeiten, die eine Gruppenstruktur mit den Eigenschaften aus (b) zulassen, nennt man Lie-Gruppen .
c) Bestimmen Sie die Tangentialraum von $T_A SL(n,\mathbb{R})$ für $A \in SL(n,\mathbb{R})$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
1) *Hopf-Abbildung*: Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{H}\}$ und $r = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K}$. Die Hopf-Abbildung $\mathbb{S}^{r(n+1)-1} \to \mathbb{K}P^n$, $x \mapsto [x]$, ist eine Submersion.
2) Wir ordnen $L \in \mathbb{K}P^n$ die orthogonale Projektion von $\mathbb{K}$ auf L zu,

$$\mathbb{K}P^n \to \mathbb{K}^{n\times n}, \quad [x] \mapsto \frac{x_i \bar{x}_j}{\|x\|^2}.$$

Sie zeigen, dass diese Abbildung wohldefiniert, glatt, injektiv und eine Immersion ist. Nun ist $\mathbb{K}P^n$ kompakt, damit ist die Abbildung eine Einbettung.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Seien $X, Y, Z \in V(M)$. Sie zeigen, dass
(i) $Z = XY - YX$ ein Vektorfeld ist,
(ii) die Jacobi-Identität $[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$ gilt und
(iii) $[fX, gY] = fg[X,Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$ für alle $f, g \in C^\infty(M)$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Es sei M eine Mannigfaltigkeit, $f : M \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $p \in M$ und (x,U) eine Karte von M um p. Wir bezeichnen p als *kritischen Punkt* von f, falls $d(f \circ x^{-1})_{x(p)} = 0$. Zeigen Sie, dass diese Definition unabhängig von der Wahl der Karte (x,U) ist. Zeigen Sie weiterhin, dass für alle Vektorfelder X und Y auf M

$$XYf(p) = YXf(p)$$

gilt, falls p ein kritischer Punkt von f ist.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 10.11.14, vor der Vorlesung**.