Übungsaufgaben zur Vorlesung
geometrische Analysis — WS 2014/2015, Serie 04
Prof. Dr. G. Wang — 10.11.2014
Dipl. M. Mattuschka

Aufgabe 1 (*Metriken*) (4 Punkte)
1) Mit Hilfe der Aufgaben 3 im Blatt 02 zeigen Sie, dass die euklidsche Metrik $ds^2 = dx^2 + dy^2$ auf $\mathbb{R}^2$ in der Polarkoordinaten die folgende From

$$dr^2 + r^2 d\varphi^2$$

hat.
2) Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ der von $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definierte Graph in $\mathbb{R}^{n+1}$, d.h, $M = F(\mathbb{R}^n)$ mit $F(u) = (u, f(u))$. Zeigen Sie, dass M eine Untermannigfaltigkeit und bestimmen Sie die zurückgezogene (pullback) Metrik (von der Stabdardmetrik vom $\mathbb{R}^{n+1}$).

Aufgabe 2 (*Isometrie*) (4 Punkte)
Sei $p_S : U_S = \mathbb{S}^m \backslash \{S\} \to \mathbb{R}^m$ Die stereographische Projektion:

$$p_S(x) = \frac{1}{1 + x_0}(x_1, \cdots, x_m)$$

mit $p = (x_0, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m+1}$. Sei $V = (v_0, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m+1} \in T_p\mathbb{S}^m$, d.h. $\langle p, V\rangle = x_0 v_0 + \langle x, v\rangle = 0$.
i) Berenchen Sie $dp_S(p)(V)$.
ii) Zeigen Sie dass $\frac{4}{(1+|p_S(p)|^2)^2}\langle dp_S(p)(V), dp_S(p)(V)\rangle = \langle V, V\rangle := v_0^2 + |v|^2$.
Daraus folgt: die Standard Metrik g_p von $\mathbb{S}^m$

$$g_p(V, W) := \frac{4}{(1 + |p|^2)^2}\langle V, W\rangle.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Sei g Riemannsche Metrik der Klasse C^0 auf der n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M. Bestimmen Sie zu $p \in M$ eine Karte (x, U) derart, so dass

$$x(p) = 0 \quad \text{und} \quad g_{ij}(p) = \delta_{ij}.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Sei g Riemannsche Metrik der Klasse C^0 auf M, und $\gamma \in C^0([a, c], M)$ mit Länge $Lg(\gamma) < \infty$. Zeigen Sie folgende Aussagen:
(1) $L_g(\gamma) = L_g(\gamma_{|[a,b]}) + L_g(\gamma_{|[b,c]})$
(2) Die Funktion $l(t) = L_g(\gamma_{|[a;t]})$ ist stetig.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 17.11.14, vor der Vorlesung**.