Übungsaufgaben zur Vorlesung
geometrische Analysis — WS 2014/2015, Serie 05
Prof. Dr. G. Wang — 17.11.2014
Dipl. M. Mattuschka

Aufgabe 1 (*Hyperbolischer Raum*) (4 Punkte)

Poincaré-Halbraum-Modell. Der Halbraum $H^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\} \subset \mathbb{R}^n$ mit der Riemannschen Metrik $\frac{(dx_1)^2+\ldots+(dx_n)^2}{x_n^2}$ ist ein Modell des hyperbolischen Raumes.
a) Bestimmen Sie die Gleichung der Geodätischen in H^2.
b) Finden Sie alle Lösungen, die durch den Punkt (0,1) laufen.

Aufgabe 2 (*Das Möbiusband*) (6 Punkte)

Betrachten Sie auf $\hat{M} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ die folgende Aquivalenzrelation

$$(x, s) \sim (y, t) \Longleftrightarrow x - y = 2k\pi, \text{ für } k \in \mathbb{Z} \text{ und } t = (-1)^k s.$$

(a) Zeigen Sie (mittels Lemma 2.10 der Vorlesung), dass der Quotient $M := \hat{M}/\sim$ eine Struktur von differezierbare Mannigfaltigkeit besitzt.

(b) Zeigen Sie, dass M ein eindimensionales Vektorbündel auf $\mathbb{S}^1$ ist.

(c) Beweisen Sie, dass M kein triviales Vektorbündel ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

a) Sei $\pi : V \to M$ ein Vektorbündel vom Rang k, und $v \in \pi^{-1}(U)$ für eine Trivialisierung $\Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$. Zeigen Sie: eine Folge $v_k \in V$ konvergiert genau dann gegen v, wenn $v_l \in \pi^{-1}(U)$ für $k > k_0$ und

$$\Phi(v_l) \to \Phi(v) \quad \text{in } U \times \mathbb{R}^k.$$

b) Seien V, W Vektorräume und $f \in L(V, W)$. Für $v_j \in V, w_j \in W$ und $j = 1, \cdots, k$ gelte

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{k} a_j^i w_i \quad \text{mit } A = (a_j^i) \in \mathbb{R}^{k \times k}$$

Zeigen Sie, dass für $\eta \in \Lambda^k W$ gilt

$$\eta(f(v_1), \cdots, f(v_k)) = \det(A)(w_1, \cdots, w_k).$$

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 24.11.14, vor der Vorlesung**.