Übungsaufgaben zur Vorlesung
geometrische Analysis — WS 2014/2015, Serie 06
Prof. Dr. G. Wang — 24.11.2014
Dipl.-Math. M. Mattuschka

Aufgabe 1 (*Das tautologische Geradenbündel*) (4 Punkte)

$M = \mathbb{K}P^n$ = 1-dimensionaler Untervektorraum von $\mathbb{K}^{n+1}$ (Serie 01, Aufgabe 2 und Serie 03, Aufgabe 2). Setze $V := \{(p,v) \in \mathbb{K}P^n \times \mathbb{K}^{n+1} | v \in p\}$ und $\pi := pr_{\mathbb{K}P^n|V}$. Es gilt dann $\pi^{-1}(p) = \{p\} \times p$. (Hier sehen wir $p = [x_0, x_1, \cdots, x_n] \in \mathbb{K}P^n$ einen Punkt in $\mathbb{K}P^n$ und auch eine durch 0 und $(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ Gerade in $\mathbb{K}^{n+1}$.) Die lokalen Trivialisierungen ergeben sich wie folgt: Sei $\alpha : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^{n+1}$ eine affin-lineare Einbettung mit $0 \notin \alpha(\mathbb{K}^n)$. Dann ist

$$\Phi_\alpha^{-1} : U_\alpha \times \mathbb{K} \to \pi^{-1}(U_\alpha), \quad (p,c) \mapsto c \cdot (p \cap (\mathbb{K}^n))$$

eine Trivialisierung mit $U_\alpha := \{L \in \mathbb{K}P^n \,|\, L \cap \alpha(\mathbb{K}^n) \neq 0\}$. Sei $\beta : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^{n+1}$ eine andere affin-lineare Einbettung mit $0 \notin \beta(\mathbb{K}^n)$. Bestimmen Sie die Übergangsfunktion $\Phi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(\mathbb{K}, 1)$.

Aufgabe 2 (*das zurückgezogene Bündel*) (4 Punkte)

Sei $f : M \to N$ eine glatte Abbildung und sei $\pi : V \to N$ ein Vektorbündel. Zeigen Sie, dass

$$f^*V := \cup_{p \in M} V_{f(p)}$$

ein Vektorbündel ist.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Auf $U := \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ betrachten wir die durch

$$\omega(x,y) := \frac{x}{x^2+y^2} dy - \frac{y}{x^2+y^2} dx, \quad (x,y) \in U$$

definierte Differentialform ω vom Grad 1.

(a) Zeigen Sie, dass ω geschlossen ist.

(b) Sei $\gamma : [a,b] \to U$ eine stetig differenzierbare Kurve. Zeigen Sie, dass die zurückgezoge Differentialform $\gamma^*(\omega)$ gegeben durch

$$\gamma^*(\omega)(t) = \langle \omega(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt,$$

wobei wir $\langle \alpha, v \rangle := \alpha(v)$ für Linearformen $\alpha \in (\mathbb{R}^n)^*$ und Vektoren $v \in \mathbb{R}^n$ setzen. Folgern Sie damit

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \langle \omega(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$$

Bitte Wenden Sie!

c) Ist $f : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so gilt

$$\int_\gamma df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

d) Sei $r > 0$ gegeben. Berechnen Sie $\int_{\gamma_r} \omega$ für $\gamma_r : [0; 2\pi] \to U, \quad t \mapsto (r\cos(t), r\sin(t))$. Kann ω exakt sein? (ω ist exakt genau dann, wenn $\omega = df$ für eine Funktion f gilt.)

Aufgabe 4 (4 Punkte)

1. Sei für $i = 1, ..., k$ eine p_i-Differentialform ω_i in einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ mit $n > \sum_{i=1}^k p_i$ gegeben. Berechne eine Produktformel für die äußere Ableitung

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_k).$$

2. Sei $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, und f, g seien stetig differenzierbare 0-Formen in $U \in \mathbb{R}^n$ mit $g = \phi \circ f$. Zeige $df \wedge dg = 0$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 1.12.14, vor der Vorlesung**.