Übungsaufgaben zur Vorlesung
geometrische Analysis — WS 2014/2015, Serie 07
Prof. Dr. G. Wang — 1.12.2014
Dipl. M. Mattuschka

---

**Aufgabe 1** (Die äußere Ableitung) (4 Punkte)

Zeigei Sie, dass die äußeren Ableitung wohldefiniert ist: Seien $(x, U)$, $(y, U')$ zwei Karten. Auf $U$ ist $\omega = \sum_{\alpha \in I(k,n)} \omega_\alpha dx^\alpha$ und

$$d\omega_{|U} := \sum_{j=1}^{n} dx^j \wedge \frac{\partial \omega}{\partial x^j} \quad \text{mit } \frac{\partial \omega}{\partial x^j} := \sum_{\alpha \in I(k,n)} \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial x^j} dx^\alpha.$$

Auf $U'$ ist $\omega = \sum_{\alpha \in I(k,n)} \eta_\alpha dy^\alpha$ und

$$d\omega_{|U'} := \sum_{j=1}^{n} dy^j \wedge \frac{\partial \omega}{\partial y^j} \quad \text{mit } \frac{\partial \omega}{\partial y^j} := \sum_{\alpha \in I(k,n)} \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial y^j} dy^\alpha.$$

Zeigen Sie mit einer direkten Berechnung, dass $d\omega_{|U} = d\omega_{|U'}$ auf $U \cap U'$.

**Aufgabe 2** ($d$, rot, div, grad) (4 Punkte)

(1) Sei $X$ Vektorfeld, $\omega$ eine $k$-Form auf $M$. Wir definieren eine $k-1$-Form durch

$$(X \llcorner \omega)(X_1, \cdots, X_{k-1}) = \omega(X, X_1, \cdots, X_{k-1}), \quad \forall X_1, \cdots, X_{k-1} \in TM.$$

Sei $M = U \subset \mathbb{R}^k$ offen und $X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Zeigen Sie

$$\begin{aligned} X \llcorner (dx^1 \wedge dx^k) &= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \xi^i dx^1 \wedge \cdots \wedge \hat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^k \\ d(X \llcorner (dx^1 \wedge dx^k)) &= (\operatorname{div} X) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k. \end{aligned}$$

Hierbei ist $\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i} \xi^i$.

(2) Sei $X \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$ mit $U \subset \mathbb{R}^3$, und $X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Sei $\omega = \sum_{i=1}^{3} \omega_i dx^i$ mit $\omega_i = \xi^i$ für $i = 1, 2, 3$. Zeigen Sie

$$d\omega = (\operatorname{rot} X) \llcorner (dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3),$$

wobei ist $\operatorname{rot} \mathrm{X} = (\partial_2 \xi^3 - \partial_3 \xi^2, \partial_3 \xi^1 - \partial_1 \xi^3, \partial_1 \xi^2 - \partial_2 \xi^1)$. Insbesondere gilt:

$$\begin{aligned} d^2 \omega = 0 &\iff \operatorname{div}(\operatorname{rot} X) = 0 \\ d^2 f = 0 &\iff \operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0. \end{aligned}$$

**Bitte wenden Sie!**

**Aufgabe 3** (4 Punkte)

Betrachten Sie auf $U \subset \mathbb{R}^2$ die konforme Riemannsche Metrik $g_{ij} = e^{2u}\delta_{ij}$ mit $u \in C^1(U)$ und $\delta_{ij}$ die Standardmetrik auf $\mathbb{R}^2$. Berechnen Sie die Operatoren $d_g^*$ und $\Delta_g$ auf $k$-Formen mit $k = 0, 1, 2$ (möglichst unter Verwendung der Operatoren $d^*$ und $\Delta$ bzgl. der Standardmetrik.)

**Aufgabe 4** (4 Punkte)

Sei $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ der $n$-dimensionale Torus mit der Standardmetrik. Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$\Delta\omega = 0, \qquad \text{für } \omega \in \Omega^k(\mathbb{T}^n),\ k = 0, 1, \cdots, n.$$

*Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.* **Abgabe ist am Montag, 8.12.14, vor der Vorlesung**.