Übungsaufgaben zur Vorlesung
geometrische Analysis — WS 2014/2015, Serie 08
Prof. Dr. G. Wang — 8.12.2014
Dipl. M. Mattuschka

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Berechnen Sie das Symbol von dem Operator $d + d_g^* : \Omega^*(M) \to \Omega^*(M)$ und dann zeigen Sie dass der Operator $d + d_g^*$ elliptisch ist.

Aufgabe 2 (4+4 Punkte)

Betrachten Sie auf $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N)$ den linearen Operator

$$(Lu)_\alpha = a_{\alpha\beta}^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} u^\beta \qquad \text{für } \alpha = 1, \cdots N$$

mit $a_{\alpha\beta}^{ij} \in \mathbb{R}$ konstant.
(1) Berechnen Sie das Symbol $\sigma_L(x)(\xi) \in \mathbb{R}^{N\times N}$ für $(x,\xi) \in T^*\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.
(2) Es gelte die Bedingung

$$\langle \sigma_L(x)(\xi)\eta, \eta\rangle > 0, \qquad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, \eta \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$$

Zeigen Sie dass L elliptisch ist, und dass die Bedingung im Fall $N = 1$ sogar äquivalent zur Elliptizit at ist.
(3) Es gelte für ein $\lambda > 0$ die Bedingung von Legendre-Hadamard

$$\langle \sigma_L(x)(\xi)\eta, \eta\rangle \geq \lambda |\xi|^2 |\eta|^2, \qquad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n, \eta \in \mathbb{R}^N$$

Zeigen Sie für $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ die Gardingsche Ungleichung

$$\int_{\mathbb{R}^n} a_{\alpha\beta}^{ij} \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial u^\beta}{\partial x^j} \geq \lambda \int_{\mathbb{R}^n} |Du|^2.$$

Hinweis. Verwenden Sie die Fouriertransformation.

Aufgabe 3 (*Hodge-Laplace für Riemannsche Flächen*) (4 Punkte)

Betrachten Sie auf $U \in \mathbb{R}^2$ die konforme Riemannsche Metrik $g_{ij} = e^{2u}\delta_{ij}$ mit $u \in C^\infty(U)$. Berechnen Sie die Operatoren d_g^* und Δ_g auf k-Formen mit $k = 0, 1, 2$ (möglichst unter Verwendung der Operatoren d^* und Δ bzgl. der Standardmetrik.)

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 15.12.14, vor der Vorlesung**.