Übungsaufgaben zur Vorlesung
geometrische Analysis — WS 2014/2015, Serie 09
Prof. Dr. G. Wang — 15.12.2014
Dipl. M. Mattuschka

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Folgern Sie aus Satz 11.11 (3) und Satz 11.13 die Abschätzung

$$\|\omega\|_{W^{2,2}} \leq C\|\Delta\omega\|_{L^2} \quad \text{für } \omega \in W^{2,2}(\wedge^k TM) \text{ mit } \omega \perp_{L^2_g} \mathcal{H}^k(M).$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei (M, g) kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit, und $\omega = \omega(x,t)$ sei glatte Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + \Delta_g\omega = 0 \quad \text{in } (0,T)\times M, \quad \omega(x,0) = \omega_0(x)\ \forall x \in M.$$

Zeigen Sie:
(1) $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\omega\|^2_{L^2} = -(\|d\omega\|^2_{L^2} + \|d^*_g\omega\|^2_{L^2})$,
(2) $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|d\omega\|^2_{L^2} = \|d^*_g d\omega\|^2_{L^2}$ und $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|d^*_g\omega\|^2_{L^2} = \|dd^*_g\omega\|^2_{L^2}$.
Folgern Sie, dass das Anfangswertproblem höchstens eine glatte Lösung hat.

Aufgabe 3 (*Green Operator*) (8 Punkte)

Sei (M, g) kompakt. Mit Satz 11.11 und seinem Beweis finden Sie den Green-Operator:

$$G : W^{-1,2}(\wedge^k TM) \to W^{1,2}(\wedge^k TM)$$

mit folgenden Eigenschaten:
(1) $G_{|\mathcal{H}^k} = 0$.
(2) $dG = Gd$ und $d^*_g G = G d^*_g$ auf $W^{-1,2}(\wedge^k TM)$.
(3) $id = p_{\mathcal{H}} + \Delta_g G$, wobei $p_{\mathcal{H}}$ der orthogonale Projektion $W^{1,2}(\wedge^k TM) \to \mathcal{H}^k(M)$ ist.
(4) Finden Sie $\operatorname{Ker} d$ und $\operatorname{Ker} d^*_g$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 22.12.14, vor der Vorlesung**.