Übungsaufgaben zur Vorlesung
geometrische Analysis — WS 2014/2015, Serie 10
Prof. Dr. G. Wang — 7.1.2015
Dipl. M. Mattuschka

Aufgabe 1 (*Zusamenhang und Isometire*) (4 Punkte)
Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und ∇ ihre Levi-Civita-Zusammenhang. Sei $f : M \to M$ ein Diffeomorphismus und $\xi \in \mathcal{V}(M)$ ein glattes Vektorfeld. Das "push-forward" Vektorfeld von f ist definiert durch

$$(f_*\xi)\big|_p = df(\xi\big|_{f^{-1}p}).$$

Zeigen Sie
a) Ist f eine Isometrie, d.h., $f^*g = g$. Dann gilt $f_*(\nabla_\eta \xi) = \nabla_{f_*\eta} f_*\xi$ für alle $\xi, \eta \in \mathcal{V}(M)$.
b) Sei $(M,g) = (\mathbb{R}^n, \delta)$. Dann haben alle Isometrie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die folgende Form: $f(x) = Ox + b$, wobei $O \in O(n)$ und $b \in \mathbb{R}^n$.
(*Hinweis. Zeigen dass f konstante Vektorfelder zur konstanten Vektorfelder abbildet. Aufgabe 2.b*)
c) Sei $\xi \in \mathcal{V}(M)$ mit konstanter Länge, d.h. $|X| := \sqrt{g(\xi,\xi)} = const$. Dann steht $\nabla_\eta \xi$ senkrecht zu ξ, für alle $\eta \in T_pM$.

Aufgabe 2 (*Parallelverschiebung*) (4 Punkte)
a) Für die Parallelverschiebung gilt: $P_{c,t_0,t_1} : (T_{c(t_0)}M, g\big|_{c(t_0)}) \to (T_{c(t_1]}M, g\big|_{c(t_1)})$ ist eine lineare Isometrie.
b) Ist $\psi : M \to \widetilde{M}$ eine lokale Isometrie (d.h. $\phi^*\tilde{g} = g$) und ist $c : I \to M$ eine C^1-Kurve, so setze $\tilde{c} := \psi \circ c$. Dann gilt für jedes C^1-Vektorfeld ξ längs c:

$$\xi \text{ parallel längs } c \Longleftrightarrow \tilde{\xi} := d\psi(\xi) \text{ parallel längs } \tilde{c}.$$

c) c ist geodätische genau dann, wenn $\tilde{c}$ geodätische ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
a) Zeigen Sie, dass $T(X,Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$ ein Tensor (2-Form) ist, d.h, gilt es $T(fX,Y) = fT(X,Y) = -T(Y,fX)$ für alle $X,Y \in \mathcal{V}(M)$ und $f \in C^\infty(M)$.
b) Sei (M,g) eine Riemannsche Manigfaltigkeit und sei $c : (-\varepsilon,\varepsilon) \times [a,b] \to M$. Zeigen Sie

$$\frac{\nabla}{\partial s}\frac{\partial c}{\partial t}(s,t) = \frac{\nabla}{\partial t}\frac{\partial c}{\partial s}(s,t).$$

c) Berechnen Sie die Transformationformel der Christoffelsymbole Γ_{ij}^k unter Kartenwechsel.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 12.1.2015, vor der Vorlesung**.