Übungsaufgaben zur Vorlesung
geometrische Analysis — WS 2014/2015, Serie 11
Prof. Dr. G. Wang — 12.1.2015
Dipl. M. Mattuschka

Aufgabe 1 (*Der Riemannsche Krümmengstensor*) (4 Punkte)
1) Prüfen Sie nach, dass in beliebigen Koordinaten gilt:

$$R^l_{kij}(0) = \frac{\partial \Gamma^l_{jk}}{\partial x^i}(0) - \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^j}(0) + (\Gamma^m_{kj}\Gamma^l_{mi} - \Gamma^m_{ki}\Gamma^l_{mj}).$$

2) Sie Zeigen die rste Bianchi-Identität.

$$R(\xi,\eta)\psi + R(\eta,\psi)\xi + R(\psi,\xi)\eta = 0$$

und

$$g_p(R(\xi,\eta)\psi,\chi) = g_p(R(\psi,\chi)\xi,\eta)$$

(*Hinweis.* Berechnen Sie in der normalen Normalkoordinaten.)

Aufgabe 2 (*Metrik der konstantn Krümmeng*) (4 + 4 Punkte)
1) In der Aufgabe 4.1 1) haben wir gezeigt, dass die euklidsche Metrik δ auf $\mathbb{R}^2$ in der Polarkoordinaten die folgende From

$$dr^2 + r^2 d\varphi^2.$$

hat. Berechnen Sie, in der Polarkoordinaten, ihre Christoffelsymbole und ihrer Krümmengstensor.
2) *Poincaré-Halbraum-Modell.* Der Halbraum $H^n = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\} \subset \mathbb{R}^n$ mit der Riemannschen Metrik $\frac{(dx_1)^2+\dots+(dx_n)^2}{x_n^2}$ ist ein Modell des hyperbolischen Raumes. Berechnen Sie, ihre Krümmengstensor, Schnittkrümmung, Ricci-Krümmeng sowie die Skalarkrümmung.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Sei V endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit positiv-definiter symmetrischer Bilinearform $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$. Sei $R : V \times V \times V \times V \to \mathbb{R}$ multilinear mit

$$R(\xi,\eta,\psi,\chi) = -R(\eta,\xi,\psi,\chi) = -R(\xi,\eta,\chi,\psi)$$

für alle $\xi,\eta,\psi,\chi \in V$. Dann hängt für $E \in G_2(V,g)$ der Ausdruck

$$K(E) := \frac{R(\xi,\eta,\eta,\xi)}{\langle\xi,\xi\rangle\langle\eta,\eta\rangle - \langle\xi,\eta\rangle^2}$$

nicht von der Wahl der Basis $\eta,\xi \in E$ von E ab, sondern nur von E selbst.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 19.1.2015, vor der Vorlesung**.