Übungsaufgaben zur Vorlesung
geometrische Analysis
Prof. Dr. G. Wang
Dipl. M. Mattuschka

WS 2014/2015, Serie 12
19.1.2015

Aufgabe 1 (*Die Hesse-Matrix*) (4 Punkte)

1). Definiere $\nabla^2_{X,Y} u := \nabla_X \nabla_Y u - \nabla_{\nabla_X Y} u = X(Yu) - (\nabla_X Y)u$. Sie zeigen $\nabla^2 u(X,Y) = \nabla^2_{X,Y} u$.
2). Zeigen Sie: $\nabla^2 u(X,Y) = \nabla^2 u(Y,X)$ für $u \in C^\infty(M)$ und $X, Y \in \mathcal{V}(M)$
3). Finden Sie die lokale Darstellung von der Hesse-Matrix.
4) Was ist die Spur von der Hesse-Matrix?
5). Berechnen Sie $\Delta(\phi \circ u)$ für $u \in C^\infty(M)$ und $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Der Weylsche Krümmungstensor W ist definiert durch

$$R = W_4(X,Y,Z,U) + \frac{s}{2n(n-1)}(g \owedge g) + \frac{1}{n-2}(B \owedge g).$$

Zeigen Sie, dass die Zerlegung ist orthonormal, d.h $g(W_4, g \owedge g) = g(g \owedge g, B \owedge g) = g(W_4, B \owedge g) = 0$. Daraus erhalten Sie

$$|R|_g^2 = |W_4|_g^2 + \left| \frac{s}{2n(n-1)}(g \owedge g) \right|^2 + \left| \frac{1}{n-2}(B \owedge g) \right|^2.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Berechnen Sie das Differential von $\Phi = \sigma^{-1} \circ F \circ \sigma$ für Translationen F sowie von $\Psi = \sigma^{-1} \circ \delta_\alpha \circ \sigma$, jeweils in e_0.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

In Aufgabe 5.3 haben wir gezeigt, dass die Standard-Metrik der Sphäre, g_p von $\mathbb{S}^m$, isomorph zur $(\mathbb{R}^m, g_0)$ mit $g_0 = \frac{4}{(1+|x|^2)^2}\delta$ ist, wobei δ die Standard-Metrik vom $\mathbb{R}^m$. Berechnen Sie den Krümmungstensor von g_0. Wegen der Isometire, der Krümmungstensor von g_0 ist auch der Krümmungstensor von der Standard-Metrik von $\mathbb{S}^m$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 26.1.2015, vor der Vorlesung**.