Übungsaufgaben zur Vorlesung
geometrische Analysis — WS 2014/2015, Serie 13
Prof. Dr. G. Wang — 26.1.2015
Dipl. M. Mattuschka

Aufgabe 1 (*Die Hesse-Matrix*) (4+4 Punkte)
1) Sie zeigen, dass für ein $(k,0)$-Tensorfeld ist $\nabla_X B$ auch ein Tensorfeld, d.h.,

$$(\nabla_X B)(X_1, \cdots, X_{i-1}, fX_i, X_{i+1}, \cdots X_k) = f(\nabla_X B)(X_1, \cdots, X_{i-1}, X_i, X_{i+1}, \cdots X_k).$$

2) Sie prüfen die Eigenschaften (2) und (3) von Prop. 15.23
3) Sie zeigen Theorem 15.24, die 2. Bianchi-Identität.
4) Überlegen Sie: wie mann die kovarainte Ableitung von $(0,k)$-Tensorfeld definiert kann.
5) Sei ω eine stetig differenzierbare 1-Form, also $(1,0)$-Tensorfeld, und h ein stetig differenzierbares $(2,0)$-Tensorfeld. Definiere eine 1-Form η mit $\eta(X) = \sum_i g(h(X,e_i),e_i)$, ($\{e_i\}$ ONB) Sie zeigen

$$\operatorname{div} \eta = g(\operatorname{div} h, \omega) + g(h, \nabla\omega).$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Berechnen Sie $\|\nabla u_\alpha\|_{L^2}^2$, $\|u_\alpha\|_{L^p}$ sowie $Q(u_\alpha)$, wobei

$$u_\alpha(y) = \left(\frac{|y|^2 + \alpha^2}{\alpha}\right)^{\frac{2-n}{2}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Sei (M,g) eine zusammenhängende, geschlossene riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 3$, und sei $vol(M,g) = 1$. Sie zeigen, dass die Funktion $[2,p] \to \mathbb{R}, s \mapsto Y_s(M,g)$ monoton fallend ist. Entweder ist $Y_s(M,g)$ ür alle $s \in [2,p]$ negativ oder $Y_s(M,g) \geq 0$ für alle $s[2,p]$. Falls $Y(M,g) \geq 0$, so ist die Funktion $s \mapsto Y_s(M,g)$ linksstetig.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Sei B eine reelle, symmetrische $n \times n$-Matrix. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \langle Bx, x\rangle dvol_{\mathbb{S}^{n-1}} = c_n \cdot \operatorname{tr}(B)$$

für eine Konstante c_n, die nur von n abhängt, und berechnen Sie den Wert von c_n.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 2.2.2015, vor der Vorlesung**.