
Aufgabe 1 (*Die Hesse-Matrix*) (4+4 Punkte)
Sei Ω ein glattes, beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^n$. Wir betrachten folgendes Problem

$$\begin{cases} \Delta u &= u^{s-1}, & \text{in } \Omega \\ u &= 0 & \text{auf } \partial\Omega \\ u &> 0 & \text{in } \Omega \end{cases} \tag{1}$$

(1) Formulieren Sie das Problem (1) als ein Variationsproblem.
(2) Zeigen Sie, dass für $s \in [2, \frac{2n}{n-2})$ das entsprechende Funktional das Minimum annimmt.
(3) Zeigen Sie, dass das Problem (1) keine Lösung hat, fall $s = \frac{2n}{n-2}$ und Ω sternförmig ist bzgl 0.
Hinweis. Man kann durch die Multiplikation der Gleichung von $x \cdot \nabla u$ berechnen und die Pohozaev-Identität zeigen.
Die Pohozaev-Identität für eine Lösung u vom (1) ist

$$\frac{n}{s}\int_\Omega |\nabla u|^2 = \int_\Omega \frac{n}{s} u^s dx = \frac{n-2}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} (\frac{\partial u}{\partial \nu})^2 (x \cdot \nu) ds,$$

Wobei ν äußernormalfeld on $\partial\Omega$ ist.
Ω ist sternförmig bzgl $0 \Rightarrow (x \cdot \nu) \geq 0$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei (M, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $\Sigma \subset M$ eine kompakte Untermannigfaltigkeit der Kodimension $k \geq 3$ und $h \in L^{k/2}(M)$. Für ein $q > \frac{k}{k-2}$ sei $u \in L_q(M)$ eine schwache Lösung der Gleichung $(\Delta + h)u = 0$ auf $M\Sigma$. Dann ist u eine schwache Lösung der Gleichung $(\Delta + h)u = 0$ auf ganz M.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 9.2.2015, vor der Vorlesung**.