Aufgabe 1
Sei X ein metrischer Raum und

$$B(X,\mathbb{R}) = \{f : X \to \mathbb{R} : \|f\|_0 < \infty\}$$

der Raum der beschränkten Funktionen auf X. Dabei ist $\|f\|_0 = \sup_X |f|$. Zeigen Sie die Existenz einer isometrischen Abbildung $G : X \to B(X,\mathbb{R})$, d.h.

$$\|G(x) - G(y)\|_0 = d(x,y) \qquad \text{für alle } x, y \in X\ .$$

Aufgabe 2

(1) Welcher der folgenden Räume ist ein Banachraum?

(1) $l^1 = \{\xi = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} : \|\xi\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\}$
(2) $C^0([0,2])$ mit der L^2 Norm.

(2) Welcher der folgenden Mengen ist folgenkompakt in l^1?

(1) $\{\xi \in l^1 : \|\xi\| < 1\}$
(2) $\{\zeta = (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^1 : |z_n| \leq |x_n| \ \ \forall n \in \mathbb{N}\}$ für eine vorgegebene Folge $\xi = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^1$.

Jeweils mit Beweis bzw. Gegenbeispiel!

Aufgabe 3
Auf der nichtleeren Menge X seien Metriken d und h gegeben. d heißt schwächer als h, falls

$$h(x_n, x) \to 0 \Rightarrow d(x_n, x) \to 0$$

für alle $x_n, x \in X$ gilt. Dann heißt h auch stärker. Gleichstarke Metriken heißen äquivalent. Zeigen Sie, dass

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \neq y \\ 0 & \text{falls } x = y \end{cases}$$

die stärkste Metrik auf X ist und finden Sie zu einer beliebigen Metrik d eine äquivalente Metrik, die beschränkt ist.

Aufgabe 4
Der metrische Raum (X,d) sei beschränkt und

$$\mathfrak{U} = \{A \subset X \ : \ A \neq \emptyset,\ A \text{ abgeschlossen}\ \}\ .$$

Betrachten Sie für $A, B \in \mathfrak{U}$ die Funktionen

$$\delta(A,B) = \sup_{x \in A} d(x,B)$$
$$\Delta_H(A,B) = \max\{\delta(A,B), \delta(B,A)\} \ .$$

Zeigen Sie: Dann ist Δ_H eine Metrik auf $\mathfrak{U}$. (Hier ist $d(x,B) = \inf_{y \in B} d(x,y)$!)

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.
Abgabe ist am Montag, den 21.04.13, bis 12.15 Uhr.