Übungsaufgaben zur Vorlesung
Funktionalanalysis — SS 2013, Serie 12
Prof. Dr. G. Wang — 8.7.2013
Dipl. M Mattuschka

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Die Aufgabe 4 in Serie 11.

Aufgabe 2(*Ehrling Lemma*) (4 Punkte)

Sei $K \in K(X, Y)$ und $T \in L(Y, Z)$ injektiv. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $C_\varepsilon < \infty$, so dass für alle $x \in X$

$$\|Kx\|_Y \leq \varepsilon \|x\|_X + C_\varepsilon \|TKx\|_Z.$$

Anwendung: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $1 < p < \infty$ und $m \geq 2$. Zeigen Sie: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine Konstante C_ε, so dass

$$\|u\|_{W_0^{k-1,p}(\Omega)} \leq \varepsilon \|u\|_{W_0^{k,p}(\Omega)} + C_\varepsilon \|u\|_{L^p(\Omega)}$$

für alle $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ gilt.
Hinweis: Sie dürfen annehmen, dass auch die Inklusion $I : W^{k,p}(\Omega) \to W^{k-1,p}(\Omega)$ kompakte Einbettung ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Es sei H ein Hilbertraum, $T \in L(H)$ mit $||T|| \leq 1, U$ der Kern von $I - T$ und $S_n := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k$. Ferner bezeichne P_U den Orthogonalprojektor auf U. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} S_n x = P_U x \qquad \forall x \in H$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Beweisen Sie, dass für $I = [0, 1]$ der Operator $K : C^0(I) \to C^0(I)$,

$$(Kf)(x) = \int_0^x f(\xi)\, d\xi$$

kompakt ist, aber keinen Eigenwert hat.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, den 15.7, im Hörsaal 2, vor der Vorlesung**.