Übungsaufgaben zur Vorlesung
Funktionalanalysis — SS 2013, Serie 03
Prof. Dr. G. Wang — 29.4.2013
Dipl.-Math. M Mattuschka

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Seien E, F, G normierte Räume. Dann ist die Abbildung

$$A \in L(E, F; G) \to L(E, (L(F, G)) \ni \tilde{A}$$

mit $A(x, y) = (\tilde{A}(x))(y)$ eine normtreuer Isomorphismus.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $T_n \in L(X, Y)$ eine Folge von Abbildungen eines Banachraumes in einen normierten Raum, so dass für alle $x \in X$ ein $T(x) \in Y$ mit

$$T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$$

existiert. Beweisen Sie, dass $T \in L(X, Y)$ mit $\|T\| \leq \liminf \|T_n\|$ gilt. Konstruieren Sie außerdem eine Folge mit $\|T\| < \liminf \|T_n\|$!

Aufgabe 3 (4 Punkte)
a) Es sei X ein $\mathbb{K}-$Vektorraum. Zeigen Sie, dass die Dimension von X genau dann endlich ist, wenn alle linearen Abbildungen $f : X \to \mathbb{K}$ beschränkt sind.

b) Sei X ein Banachraum und $M \subset X$. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

1. M ist beschränkt.
2. $\sup\{Ax : x \in M\} < \infty$ für jedes $A \in X'$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein beschränkter Maßraum, d.h., $\mu(X) < \infty$, außdem nichttrivial, d.h., $\mu(X) > 0$, und für μ-messbare Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$ und $1 \leq p < \infty$ sei

$$\Phi_p(f) := \begin{cases} \left(\frac{1}{\mu(X)} \int_X |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} & \text{falls } f \in L^p(X, \mu), \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt: $p \mapsto \Phi_p(f)$ ist monoton nichtfallend und für $f \in L^\infty(X, \mu)$ gilt

$$\|f\|_{L^\infty} = \lim_{p\to\infty} \Phi_p(f) = \lim_{p\to\infty} \|f\|_{L^p}.$$

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, den 6.5., im Hörsaal 2, vor der Vorlesung**.