Übungsaufgaben zur Vorlesung
Funktionalanalysis — SS 2013, Serie 04
Prof. Dr. G. Wang — 6.5.2013
Dipl. M Mattuschka

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $X = C^0[0,1]$ normiert mit der Supremumsnorm und $k \in C^0([0,1] \times [0,1])$.
a) Berechnen Sie die Norm des Fredholmoperators

$$K : X \to X, f \mapsto Kf = \int_0^1 k(\cdot, t) f(t)\, dt.$$

b) Sie Zeigen, dass

$$\{Kf \,:\, f \in \overline{B_1(0)}\}$$

relativ kompakt in X ist, d.h. der Abschluss der Menge ist kompakt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein beschränkter Maßraum, d.h., $\mu(X) < \infty$, außerdem nichttrivial, d.h., $\mu(X) > 0$. Wenn für alle $1 \leq p < \infty$ die Funktion $f \in L^p(\mu)$ ist mit $\|f\|_{L^p} \leq C_0$, dann ist auch $f \in L^\infty(\mu)$ mit $\|f\|_{L^\infty} \leq C_0$.
Hinweis. Widerspruch-Argumente.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

a) Wenn ein Banach Raumm X eine Teilmenge M enthält, die keine abzählbare dichte Teilmenge besitzt, so ist X nicht separabel.

b) Zeigen Sie, dass l^∞ nicht separabel ist, aber den separablen Unterraum $c_0(\mathbb{N})$ enthält. ($c_0(\mathbb{N})$ ist der Raum der Nullfolgen, der mit $\|\cdot\|_{l^\infty}$ versehen wird.)
Hinweis. Verwenden Sie a).

c) Geben Sie einen Unterraum von $(L^\infty(\Omega), \|\cdot\|_{L^\infty})$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen) an, der isometrisch isomorph zu l^∞ ist.
Bemerkung. Aus a) –c) ist $L^\infty(\Omega)$ nicht separabel.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, den 13.5., im Hörsaal 2, vor der Vorlesung**.