Übungsaufgaben zur Vorlesung
Funktionalanalysis — SS 2013, Serie 05
Prof. Dr. G. Wang — 13.5.2013
Dipl.-Math. Marco Mattuschka

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Zeigen Sie: Die Abbildung $\Phi : l^1(\mathbb{N}) \to c_0(\mathbb{N})'$, definiert durch

$$\Phi(x)(y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n, \quad y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}, \in c_0(\mathbb{N}), x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^1(\mathbb{N}),$$

ist ein isometrischer Isomorphismus, wobei $c_0(\mathbb{N})$ die Menge der Nullfolgen ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei X ein normierter Raum und $X'' = (X')'$ der Bidualraum von X, d. h. $X'' = L(X', \mathbb{R})$. Beweisen Sie, dass die Abbildung $J : X \to X''$, $Jx(\varphi) = \varphi(x)$ isometrisch ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

1) Sei X ein normierter Raum mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Seien A und B disjunkte, konvexe Teilmengen von X, wobei A abgeschlossen sei und B kompakt. Zeigen Sie die Existenz eines Funktionals $\varphi \in X'$, so dass gilt

$$\sup_{x\in A} \varphi(x) < \inf_{x\in B} \varphi(x).$$

2) Sei X wieder ein normierter Raum und $K \subset X$ eine konvexe Menge. Es gelte $0 \notin \overline{K}$. Zeigen Sie die Existenz eines $\varphi \in X'$ mit den Eigenschaften

$$\|\varphi\| = 1 \text{ und } \varphi(x) \leq -\operatorname{dist}(0, K) \text{ für alle } x \in K.$$

Finden Sie ein Gegenbeispiel, welches belegt, dass die Voraussetzung $0 \notin \overline{K}$ nicht zu $0 \notin K$ abgeschwächt werden darf.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei E ein reeller (oder komplexer) normierter Raum, und es gelte

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \quad \text{für alle } x, y \in E.$$

Zeigen Sie: Es gibt ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf E mit $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$ für alle $x \in E$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, den 27.5., im Hörsaal 2, vor der Vorlesung**.