Übungsaufgaben zur Vorlesung
Funktionalanalysis SS 2013, Serie 05
Prof. Dr. G. Wang 27.5.2013
Dipl.-Math. M Mattuschka

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei $w \in C([0,1],\mathbb{R})$. Betrachte auf $C([0,1]) \times C([0,1])$ die Abbildung

$$\langle x, y\rangle_w := \int_0^1 x(t)\overline{y(t)}w(t)dt.$$

Gib notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, dass $\langle \cdot, \cdot\rangle_w$ ein Skalarprodukt ist. Wann ist die von $\langle \cdot, \cdot\rangle_w$ abgeleitete Norm äquivalent zur vom üblichen Skalarprodukt $\langle x, y\rangle := \int_0^1 x(t)\overline{y(t)}dt$ abgeleiteten Norm?

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Ein normierter Raum heißt *strikt konvex*, falls gilt:

$$\|x\| = \|y\| = 1 \quad \& \quad \|\frac{x_1 + x_2}{2}\| = 1 \Rightarrow x = y.$$

1) Geben Sie ein Beispiel von strikt konvexem normierten Raum.
2) Sei X' strikt konvex. Dann gilt Eindeutigkeit im Fortsetzungssatz von Hahn-Banach für lineare Funktionale (Satz 4.1.3).

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Es sei $e_i := (\delta_{ik})_{k\in\mathbb{N}}$ für $i \in \mathbb{N}$, $e := (1)_{k\in\mathbb{N}} \in l^\infty$. Zeigen Sie: es existiert $\varphi \in (l^\infty)'$ mit

$$\varphi(e) \neq 0 \text{ und } \varphi(e_i) = 0 \text{ für alle } i \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie weiter, es gibt kein $y = (y_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l^1$ mit

$$\varphi(x) = \sum_{j=k}^{\infty} x_k y_k \text{ für alle } x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l^\infty.$$

Schließen Sie daraus, dass die Einbettung $J : l^1 \to (l^\infty)'$, $(Jy)(x) = \sum_{k=1}^\infty x_k y_k$, nicht surjektiv ist.
(*Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Hahn-Banach.*)

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Zeigen Sie den folgenden Trennungssatz von Hahn-Babach in einem Hilbertraum mittels des Projektionssatzes.
$M \subset X$ sei abgeschlossen und konvex, und set $x \notin M$. Dann existiert $\varphi \in X'$ mit

$$\operatorname{Re}\varphi(x) < \inf\{\operatorname{Re}\varphi(y) \, : \, y \in M\}.$$

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, den 2.6., im Hörsaal 2, vor der Vorlesung**.