Übungsaufgaben zur Vorlesung
Funktionalanalysis — SS 2013, Serie 07
Prof. Dr. G. Wang — 2.6.2013
Dipl.-Math. Marco Mattuschka

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Zeigen Sie: Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Funktionenfolge in $C[a,b]$, wobei $a < b \in \mathbb{R}$. Falls die Funktionenfolge gegen f punktweise für jedes $t \in [a,b]$ konvergiert, so liegt die Menge der Stetigkeitspunkte von f dicht in $[a,b]$.
Verwenden Sie die Aussagen des Baireschen Kategoriesatzes.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Es sei C der Banachraum aller reellwertigen stetigen Funktionen $x : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$, versehen mit der Maximumsnorm. Zeigen Sie unter Verwendung des Satzes von der gleichmäßigen Beschränktheit, dass es mindestens eine Funktion $f \in C$ geben muss, deren Fourierreihe im Nullpunkt divergiert. Beachten Sie dabei, dass die n-te Teilsumme einer Fourierreihe von $x \in C$ im Nullpunkt gegeben wird durch

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\, x(t)\, dt, \qquad D_n(t) := \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin(\frac{t}{2})} \qquad t \in [-\pi,\pi] \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

$s_n \in C'$ und die Operatornorm ist berechnet in der Aufgabe 1. a), Serie 04.
Die Fourierreihe von f ist definiert durch

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cdot \cos(kt) + b_k \cdot \sin(kt))$$

mit

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cdot\cos(kt)\,\mathrm{d}t \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cdot\sin(kt)\,\mathrm{d}t.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Sei X Banachraum und seien Y, Z normierte Rume sowie $T : X \times Y \to Z$ eine bilineare Abbildung mit den Eigenschaften:
1. $\forall x \in X : T(x,) \in L(Y,R)$, 2. $\forall y \in Y : T(,y) \in L(X,R)$.
Zeige: T ist stetig. (Banachsteinhaus)

Aufgabe 4 (4 Punkte)
a) Zeige zunächst, dass $C^1([0,1])$ bzgl. der Norm $\|f\| := \|f'\|_{L^\infty} + \|f\|_{L^\infty}$ ein Banachraum ist. Schließe anschließend daraus (mit Korollar 6.1.9) auf die Nichtvollständigkeit des normierten Raumes $(C^1([0,1]), \|\cdot\|_{L^\infty})$.
b) Zeige: Die Abbildung $T : (C^1([0,1]), \|\cdot\|_{L^\infty}) \to (C([0,1]), \|\cdot\|_{L^\infty}), f \mapsto f'$, ist graphenabgeschlossen, aber nicht stetig.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, den 9.6., im Hörsaal 2, vor der Vorlesung**.