Übungsaufgaben zur Vorlesung
Funktionalanalysis — SS 2013, Serie 08
Prof. Dr. G. Wang — 10.6.2013
Dipl.-Math. Marco Mattuschka

Aufgabe 1 (4+4 Punkte)

a) Sei X ein normierter Raum.

(i) Dann gilt $x_n \rightharpoonup x$ in X genau dann, wenn $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| < \infty$ ist und es eine dichte Teilmenge $D \subset X^*$ mit $\langle x_n, \phi\rangle \to \langle x, \phi\rangle$ für alle $\phi \in D$ gibt.

(ii) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X ist genau dann eine schwache Cauchyfolge, wenn $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| < \infty$ ist und es eine dichte Teilmenge $D \subset X^*$ gibt, so dass $(\langle x_n, \phi\rangle)$ für alle $\phi \in D$ eine Cauchyfolge ist.

b) Sei X ein Hilbertraum. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

i) $x_n \to x$ für $n \to \infty$,

ii)$x_n \rightharpoonup x$ und $\|x_n\| \to \|x\|$ für $n \to \infty$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Verifizieren Sie folgenden Sachverhalt: Für eine reelle Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind äquivalent:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} s_n$ konvergiert absolut.
2. Für alle Nullfolgen $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} s_n\, t_n$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei X ein reeller normierter Raum. Es seien $a \in X \setminus W$, wobei W eine konvexe abgeschlossene Teilmenge von X sei. Dann gilt:

1. Ist X strikt konvex, so gibt es höchstens ein $x \in W$ mit der Eigenschaft $\|x - a\| = \inf_{y\in W} \|a - y\|$.
2. Ist X reflexiv, so existiert ein $x \in W$ mit $\|x - a\| = \inf_{y\in W} \|a - y\|$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei X ein reflexiver Banachraum und die Abbildung $J : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ habe die Eigenschaft $\liminf_{n\to\infty} J(u_n) \geq J(u)$, wenn immer eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ schwach gegen ein Element $u \in X$ konvergiert. Weiterhin gelte $J(u) \geq \alpha\, \|u\| + \beta$ für alle $u \in X$, wobei $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ fest sind. Zeigen Sie, dass unter der Annahme $J(y) < \infty$ für wenigstens ein $y \in X$ die Abbildung $J : X \to \mathbb{R}$ mindestens einmal ein Minimum $v \in X$ annimmt, d.h. es existiert ein $v \in X$, so dass

$$J(v) = \inf_{u\in X} \{\ J(u)\ \ \|\ u \in X\ \}$$

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, den 17.6., im Hörsaal 2, vor der Vorlesung**.