Übungsaufgaben zur Vorlesung
Funktionalanalysis SS 2013, Serie 09
Prof. Dr. G. Wang 17.6.2013
Dipl. M Mattuschka

Aufgabe 1 (4 Punkte)

1. M sei Teilmenge des Vektorraums E. Zeigen Sie, dass der Durchschnitt aller konvexen Mengen $K \subseteq E$ mit $M \subseteq K$ konvex ist. Man nennt diesen Durchschnitt konvexe Hülle von M.

2. Verifizieren Sie, dass die konvexe Hülle von M gegeben ist durch die Menge aller konvexen Kombinationen der Elemente aus M :

$$\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, x_i \;\mid\; x_i \in M, \; \lambda_i \geq 0, \; i = 1...n, \; \lambda_1 + ... + \lambda_n = 1, \; n \in \mathbb{N}\}$$

3. Zeigen Sie, dass der Abschluss einer konvexen Menge in einem normierten Raum konvex ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $0 < \alpha < 1$. Wir definieren

$$C^{\alpha}\left(\overline{\Omega}\right) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \colon \sup_{x \neq y \in \Omega} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^{\alpha}} < \infty \right\}.$$

i) Zeigen Sie, dass

$$[f]_{C^{\alpha}(\Omega)} := \sup_{x \neq y \in \Omega} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^{\alpha}}$$

ein halbnorm ist.

ii) Zeigen Sie, dass der Raum $f \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ mit

$$\|f\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} := \|f\|_{C^0(\Omega)} + [f]_{C^{\alpha}(\Omega)} < \infty$$

ein Banachraum ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Der Raum $C^{\alpha}([-1, 1])$ ist nicht separabel.

Hinweis. Betrachten die Funktionen $u_{x_0}(x) := |x - x_0|^{\alpha}$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $\Omega = (-1, 1)$. Definiere $u \in L^1(\Omega)$ durch

$$u(x) = \begin{cases} u_1(x) & \text{für } x < 0, \\ u_2(x) & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

mit $u_1 \in C^1((-1, 0])$ und $u_2 \in C^1([0, 1))$. Zeigen Sie, dass u genau dann ein schwache Ableitung besitzt, wenn $u_1(0) = u_2(0)$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, den 24.6., im Hörsaal 2, vor der Vorlesung**.