Dr. Susanne Knies, Philipp Nägele 14.1.2013

Mathematik I für Naturwissenschaftler

WS 2012/13 — Blatt 11

Abgabe: Montag, den 21. Januar, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Ziel dieser Aufgabe ist es, eine approximative Lösung der Gleichung $e^x - 1 = \cos x$ zu finden.

1. Definieren Sie eine geeignete Hilfsfunktion, mit der Sie das Problem in ein äquivalentes Nullstellenproblem umschreiben können.
2. Lösen Sie das Nullstellenproblem mit dem Newton-Verfahren. Beginnen Sie dazu bei $x_0 = 1$ und runden Sie Ihre Zwischenergebnisse x_i auf 5 Stellen genau. Berechnen Sie x_1 bis x_4 und testen Sie x_4 in der Ausgangsgleichung. Überzeugen Sie sich anschließend anhand einer Skizze davon, dass $x_0 = 1$ ein sinnvoller Startwert ist. Denken Sie daran, Ihren Taschenrechner auf Bogenmaß einzustellen!

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Für kleine Auslenkungen $\alpha(t)$ lautet die Differentialgleichung für die Schwingung eines idealen Pendels

$$\alpha''(t) + \frac{g}{l}\alpha(t) = 0.$$

Hierbei bezeichnet l die Länge des Pendels und g die Gravitationskonstante. Zeigen Sie, dass sowohl die Funktionen $\alpha_1(t) := \cos(\sqrt{\frac{g}{l}}t)$ und $\alpha_2(t) := \sin(\sqrt{\frac{g}{l}}t)$, als auch alle Funktionen $h(t) = c_1\alpha_1(t) + c_2\alpha_2(t)$, mit beliebigen reellen Zahlen c_1 und c_2, die Schwingungsgleichung lösen.

Aufgabe 3: **4 Punkte**

1. Zeigen Sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass die Funktion $f(x) = x^6 - x^4 - x^3 - x^2 + 1$ mindestens zwei reelle Nullstellen hat.
2. Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = (x+1)(x-1)(x-3)$.
   (a) Geben Sie maximale Intervalle an, auf denen g monoton ist.
   (b) Geben Sie maximale Intervalle an, auf denen g konvex ist.

   Hinweis zur Notation: Man schreibt $\{\, x \in \mathbb{R} \mid x \geq a \,\} = [a, \infty)$.

Bitte wenden!

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Wissenschaftler haben herausgefunden, dass der Energieverbrauch eines Wellensittichs in Abhängigkeit von der Fluggeschwindigkeit v näherungsweise durch die Funktion
$$E(v) = \frac{1}{v}\Big(\frac{1}{100}(v-20)^2 + 21\Big)$$
gegeben ist. Dabei wird E in Kalorien pro Gramm Körpergewicht pro Kilometer Flugstrecke und v in Kilometer pro Stunde gemessen.

1. Wie schnell muss ein Wellensittich fliegen, damit er möglichst wenig Energie verbraucht?

2. Wie hoch ist der optimale Energieverbrauch eines Wellensittichs mit 50 Gramm Körpergewicht auf einer Flugstrecke von 500 Metern?

Anwesenheitsaufgaben zu Blatt 11

Aufgabe 1:
Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^x \text{ falls } x < 0, \\ ax + b \text{ falls } x \geq 0. \end{cases}$$

1. Wie muss man die Konstanten a, b wählen, damit f stetig ist?

2. Für welche Werte von a und b ist f sogar stetig differenzierbar? Ist f dann sogar zweimal stetig differenzierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2:
Untersuchen Sie die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3}{e^x - 1}$ und $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^2+3x}$.

Aufgabe 3:
Berechnen Sie die Schwingungsdauer T eines Pendels der Länge $l = 6378$ Kilometer, dessen Schwingung durch $\alpha(t) = \cos(\sqrt{\frac{g}{l}}t)$ beschrieben wird (siehe Aufgabe 2).