

Mathematik I für Naturwissenschaftler

WS 2012/13 — Blatt 12

Abgabe: Montag, den 28. Januar, vor der Vorlesung**Aufgabe 1:****4 Punkte**

1. Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}$ mit Hilfe der Regel von l'Hospital. Überzeugen Sie sich zunächst davon, dass die Voraussetzungen erfüllt sind.
2. Können Sie mit Hilfe des ersten Aufgabenteils auf die Existenz des Grenzwerts $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^2} \ln(\cos x)}$ schließen? Begründen Sie Ihre Antwort.
3. Berechnen Sie $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

Aufgabe 2:**4 Punkte**

1. Gegeben $f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x + 1)$, berechnen Sie das Taylorpolynom fünfter Ordnung um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.
2. Können Sie ein Muster für eine Reihendarstellung von f in $x_0 = 0$ erkennen?
3. Berechnen Sie mit Ihrer Vermutung aus dem zweiten Aufgabenteil den Wert $\ln(2)$, indem Sie geeignete Werte für x_0 und x wählen.

Aufgabe 3:**4 Punkte**

Das Wachstum einer Population folge dem logistischen Wachstumsgesetz $x_{n+1} = \frac{1}{4}(10 - x_n)x_n$ mit $x_0 = 4$.

1. Berechnen Sie x_1, x_2 und x_3 .
2. Wie groß sind die Kapazitätsgrenze und die Gleichgewichtslage?
3. Überprüfen Sie, ob die Gleichgewichtslage stabil ist.

Aufgabe 4:**4 Punkte**

Sei $f(x) = x^6 - x^4 - x^3 - x^2 + 1$. Zeigen Sie anhand der Taylorreihenentwicklung von f , dass f an der Stelle $x_0 = 0$ ein lokales Maximum hat.

Aufgabe 5:**4 Punkte**

Der Hausmeister Ihres ehemaligen Wohnheims ist Ihnen auf die Schliche gekommen und hat bemerkt, dass Sie beim Auszug die Decke Ihres quadratischen Zimmers nicht gestrichen haben. Er verlangt deshalb von Ihnen, zur Strafe die Farbe für die ausstehende Fläche selbst zu bezahlen. Sie glauben sich zu erinnern, dass Ihr Zimmer 4 Meter breit war, gehen aber davon aus, 5 Dezimeter daneben zu liegen. Wie stark weicht die tatsächliche Fläche der Decke dann maximal von Ihrer Schätzung ab? Berechnen Sie den Fehler mit der Formel

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \max_{y \in [x_0 - 0,5m, x_0 + 0,5m]} |f'(y)| \Delta x_{\max}$$

für eine geeignete Funktion f .

Von den fünf Aufgaben auf diesem Blatt dürfen Sie maximal vier Aufgaben abgeben

Anwesenheitsaufgaben zu Blatt 12

Aufgabe 1:

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mit Hilfe der Regel von l'Hospital aber überprüfen Sie zunächst ob die Voraussetzungen erfüllt sind.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{e^x - 1}$.
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^2 + 3x}$
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x + 2x}{\cos x + 2x}$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x}$.
5. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^a - a^x}{a^x - x^a}$, $a \neq 1$, $a \neq 0$. Tipp: Schreiben Sie zunächst x^a und a^x als $e^{a \ln x}$ bzw. $e^{x \ln a}$.
6. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^a - a^x}{a^x - a^a}$

Aufgabe 2:

Berechnen Sie jeweils das Taylorpolynom der Ordnung drei im Punkt $x_0 = 0$.

1. $f(x) = e^{2x}$.
2. $g(x) = \sin x$.