

**Mathematik I für Naturwissenschaftler**

WS 2012/13 — Blatt 14

**Abgabe: Nach Vereinbarung****Aufgabe 1:****4 Punkte**

Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und gerade, d.h.  $f(x) = f(-x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ , und  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sei stetig und ungerade, d.h.  $g(-x) = -g(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Zeigen Sie:

1. Für alle  $a \in \mathbb{R}$  gilt  $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$

2. Für alle  $a \in \mathbb{R}$  gilt  $\int_{-a}^a g(x) dx = 0$ .

3. Welchen Wert hat für beliebiges  $a \in \mathbb{R}$  das Integral  $\int_{-a}^a f(x)g(x) dx$ ?  
Begründen Sie Ihre Antwort.

**Aufgabe 2:****4 Punkte**

Berechnen Sie mit Hilfe der angegebene Substitution für beliebige  $a, b \in \mathbb{R}$ :

1.  $\int_a^b x \sin(x^2) dx$ , mit  $f(y) = \sin y$  und  $g(x) = x^2$ .

2.  $\int_a^b x e^{x^2} dx$ , mit  $f(y) = \frac{1}{2}e^y$  und  $g(x) = x^2$ .

3. **Zusatzaufgabe (ohne Wertung):** Geben Sie die Stammfunktionen  $F(t) = \int_a^t x \sin(x^2) dx$  und  $G(t) = \int_a^t x e^{x^2} dx$  konkret an.

**Aufgabe 3:****4 Punkte**

Berechnen Sie mit Hilfe der angegebenen Substitution den Wert der folgenden Integrale:

1.  $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$ , mit  $f(y) = \frac{1}{y^2}$  und  $g(x) = \sin x$ .

2. Zeigen Sie, dass  $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$  gilt und berechnen Sie dann  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^2 + (\tan x)^4 dx$  mit Hilfe der Substitution  $f(y) = y^2$  und  $g(x) = \tan x$ .

**Aufgabe 4:****4 Punkte**

Für welche  $\alpha \in \mathbb{R}$  existieren die uneigentlichen Integrale  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$  und  $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$ ?

## Anwesenheitsaufgaben zu Blatt 14

### Aufgabe 1:

Berechnen Sie mit Hilfe der Substitutionsregel die folgenden Integrale

1.  $\int_0^{\pi} \sin(3x + 1) dx$

2.  $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \cos(x) \cos(\sin(x)) dx.$

### Aufgabe 2:

1. Berechnen Sie mit Hilfe des "ln-Tricks"  $\int_0^3 \frac{x}{4x^2+1} dx.$

2. Berechnen Sie mit Hilfe von Partialbruchzerlegung  $\int_{-2}^2 \frac{1}{(x-3)(x+4)} dx.$

**Wir wünschen Ihnen viel Glück und Erfolg  
für die Klausuren!**