Dr. Susanne Knies, Philipp Nägele 26.11.2012

Mathematik I für Naturwissenschaftler

WS 2012/13 — Blatt 6

Abgabe: Montag, den 3. Dezember, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Betrachten Sie die Abbildung $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $T(z) := \frac{z}{|z|+a}$ für $a > 0$.

1. Drücken Sie die Abbildung mit Hilfe von Polarkoordinaten aus.
2. Zeigen Sie: $T(\mathbb{C}) \subset B := \{\, z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1 \,\}$ und zeigen Sie, dass $z_0 = 0$ der einzige Punkt ist für den gilt $T(z) = z$.
3. Sei $\mathbb{R}$ die reelle Achse. Was ist $T(\mathbb{R})$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Sei $z = re^{i\varphi}$, $r, \varphi \in \mathbb{R}$, eine beliebige komplexe Zahl. Zeigen Sie, dass durch $w_k := \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi + k2\pi}{n}}$, $k = 0, ..., n-1$, alle Lösungen der Gleichung $w^n = z$ gegeben sind.

Aufgabe 3: **4 Punkte**

In der komplexen Ebene bilden die Punkte $A = -2 + 3i$, $B = 1 - i$ und $C = 5 + 4i$ ein Dreieck. Berechnen Sie die Seitenlängen des Dreiecks.

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Das Referenzformat für die Papiergröße DIN$A0 =: A(0)$ hat die Seitenlängen $2^{\frac{1}{4}}$ Meter und $2^{-\frac{1}{4}}$ Meter. Hiervon ausgehend erhält man das Format $A(n)$, $n \geq 1$, indem man beim Format $A(n-1)$ die längere Seite halbiert, das heißt $S_0 = 2^{\frac{1}{4}}\mathrm{m}$, $S_1 = 2^{-\frac{1}{4}}\mathrm{m}$, $S_{n+1} = \frac{S_{n-1}}{2}$ und $A(n)$ hat die Seitenlängen S_n und S_{n+1}.

1. Mit $F(n)$ werde die Fläche von $A(n)$ bezeichnet. Berechnen sie $F(0)$ und geben Sie eine Formel für $F(n)$ in Abhängigkeit von n an. Wie groß ist $F(4)$?
2. Bestimmen Sie das Format $A(4)$, indem sie die Seitenlängen rekursiv berechnen. Berechnen Sie außerdem $F(4)$ und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem für $F(4)$ aus dem ersten Teil.

Bringen Sie bitte einen Taschenrechner mit in die Übung. Sie dürfen in Zweiergruppen abgeben!

Anwesenheitsaufgaben zu Blatt 6

Aufgabe 1:

1. Sei p ein Polynom vom Grad $n \geq 1$ mit reellen Koeffizienten. Zeigen Sie, dass für $z \in \mathbb{C}$ dann gilt: $p(\overline{z}) = \overline{p(z)}$.

2. Sei p ein Polynom vom Grad $n = 2$ mit reellen Koeffizienten. Ist es möglich, dass p sowohl eine komplexe als auch eine reelle Nullstelle hat? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2:
Sei $D : \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| > 2 \} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $D(z) := \frac{z}{|z|-2}$ und sei $S_3 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 3 \}$. Zeigen Sie, dass für alle Punkte $w \in S_3$ gilt: $D(w) = w$.

Aufgabe 3:
Für eine Population unterstellen wir ein logistisches Wachstum der Form $x_n = \frac{1}{K-E}(K - x_{n-1})x_{n-1}$.

1. Berechnen Sie die ersten sechs Folgenglieder für $K = 100$, $E = 70$ und $x_0 = 80$.

2. Berechnen Sie die ersten fünf Folgenglieder für $K = 100$, $E = 50$ und $x_0 = 80$.