Dr. Susanne Knies, Philipp Nägele 3.12.2012

Mathematik I für Naturwissenschaftler

WS 2012/13 — Blatt 7

Abgabe: Montag, den 10. Dezember, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Aus der Vorlesung wissen Sie, dass die n-te Fibonacci-Zahl $F_n \in \mathbb{N}$ gegeben ist durch $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n\right) =: \frac{1}{\sqrt{5}}\lambda_+^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\lambda_-^n$.

1. Zeigen Sie, dass gilt: $\lambda_+^{-1} = -\lambda_-$. Tipp: Benutzen Sie eine geeignete binomische Formel und nicht den Taschenrechner.

2. Für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$ gilt: F_n ist die der Zahl $\frac{1}{\sqrt{5}}\lambda_+^n$ am nächsten gelegene ganze Zahl. Beweisen oder widerlegen Sie diese Aussage.

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Durch die Nuklearunfälle von Fukushima 2011 wurden unter anderem die radioaktiven Stoffe Jod 131 und Cäsium 137 freigesetzt. Die Halbwertszeit beim radioaktiven Zerfall ist die Zeitspanne, in der die Menge und damit auch die Aktivität eines gegebenen Radionuklids durch den Zerfall auf die Hälfte gesunken ist. Jod 131 hat eine Halbwertszeit von 8 Tagen und Cäsium 137 von etwa 30 Jahren.

1. Wieviel Prozent des freigesetzten Jod 131 sind nach acht Wochen noch übrig?

2. Wieviele Jahre dauert es ungefähr bis nur noch ein Tausendstel der freigesetzten Menge Cäsium 137 übrig ist?

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei gegeben durch $a_n = 3 + \frac{(-1)^n}{n^k}$ für festes $1 \leq k \in \mathbb{N}$.

1. Berechnen Sie den Grenzwert a der Folge und erklären Sie, warum er unabhängig von k ist.

2. Bestimmen Sie für $k = 1, 2, 3$ eine Zahl $N(k) \in \mathbb{N}$ in Abhängigkeit von k, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N(k)$ gilt $|a_n - a| \leq \frac{1}{1000}$.

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Frosch Hugo ist ein alter Hase unter den Fröschen und außerdem frisch verliebt. Leider trennt ihn eine 25 Meter breite, dafür aber völlig unbefahrene Straße von seiner neuen Angebeteten. Hugo ist sich sicher, dass sich seine Sprungkraft mit jedem Sprung um einen Faktor q, $q \in (0, 1)$, verringert. Von früheren Dates weiß er zwar, dass sein dritter Sprung 3 Meter und sein siebter Sprung noch 1 Meter weit sein wird, er weiß aber auch, dass er in seinem Alter nur noch maximal 15 Sprünge vollführen kann. Hat diese Liebe eine Chance? Begründen Sie Ihre Antwort. Tipp: Kann Hugo q und die Weite seines ersten Sprungs berechnen?

Anwesenheitsaufgaben zu Blatt 7

Aufgabe 1:
Begründen Sie, warum die angegebenen Folgen konvergieren bzw. divergieren:

1. $a_n := \begin{cases} n, \text{ falls } 0 \leq n \leq 10000 \\ \frac{n+10000}{n^2}, \text{ falls } 10001 \leq n \end{cases}$

2. $b_n := \begin{cases} n, \text{ falls } n \text{ gerade ist,} \\ \frac{1}{2n-1} \text{ falls } n \text{ ungerade ist.} \end{cases}$

3. $c_n := b_{2n+1}$

Aufgabe 2:
Eine Bergziege wird um 15 Uhr nachmittags auf 450 Metern Höhe gesehen und um 17 Uhr auf 700 Metern. Nehmen Sie an, dass die Ziege um 12 Uhr mittags gestartet ist und immer weiter den Berg hinauf klettert, um eine Formel aufzustellen, die die Höhe der Ziege in Abhängigkeit der Uhrzeit angibt.

Aufgabe 3:

1. Schreiben Sie $\sum_{n=1}^{10} \frac{(-1)^n}{n}$ explizit als Summe aus.

2. Schreiben Sie $S = 1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+...$ in der Form $S = \sum_{n=?}^{\infty} a_n$. Geben Sie eine explizite Formel für $S(k) = \sum_{n=0}^{k} a_n$ an.

3. Betrachten Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := \{1, 2, 5, 26, 677, 458330, ...\}$ Finden Sie eine Rekursionsvorschrift für a_n. Tipp: Setzen Sie $a_1 = 1$.

4. Sei $a_0 = a_1 = 1$ und $a_{n+1} = 3a_n - a_{n-1}$. Schreiben Sie die ersten sieben Folgenglieder auf.