Mathematik I für Naturwissenschaftler

WS 2012/13 — Blatt 9

Abgabe: Montag, den 7. Januar, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **4 Punkte**

1. Skizzieren Sie den Graph von $g : [-4, 1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = 3x+5$. Berechnen Sie außerdem die Umkehrfunktion g^{-1} unter Angabe des Definitions- und Wertebereichs und zeichnen Sie den Graph von g^{-1}.

2. Welcher geometrische Zusammenhang besteht zwischen dem Graph von g und dem von g^{-1}.

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Gegeben seien die Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{x^8-1}{x^4+1}$, $g(x) := -x^2 + 7$ und $h : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $h(x) := x^2$. Wir bezeichnen mit G die von den Graphen von f und g eingeschlossene Fläche und mit H den Graph von h. Außerdem sei $K := \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,|\, (x-1)^2 + (y-3)^2 \leq 0,5 \}$ und $L := \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,|\, (x+1)^2 + (y-3)^2 \leq 0,5 \}$. Skizzieren Sie die Menge $G \setminus (K \cup L \cup H)$.

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Der Trainer der Handballmannschaft des "HC Turbine Dupfingen" kann aus dem Vollen schöpfen, denn beide Torhüter und alle 12 Feldspieler sind, trotz der Weihnachtsfeier am Vorabend, tatsächlich zur Abfahrt zum Auswärtsspiel beim "TuS Amboss Dettingen '05" erschienen. In der ersten Halbzeit lässt der Trainer seine Stammmannschaft, bestehend aus 6 Feldspielern und einem Torwart auflaufen. Nach einer katastrophalen Leistung in der ersten Halbzeit, sieht er sich allerdings dazu gezwungen, 3 Feldspieler und den besonders schlecht aufgelegten Torwart vorzeitig zum Duschen zu schicken. Wieviele Möglichkeiten hat er, diese Spieler zu ersetzen, wenn gleichzeitig die verbleibenden 3 Feldspieler aus der Stammmannschaft auf jeden Fall zu Ende spielen müssen?

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Skizzieren Sie folgenden Funktionen (ohne GTR!) und erläutern Sie Ihre Ergebnisse!

1. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$,

2. $g(x) = \frac{3x^2-9}{4x^2-4}$.

Aufgabe 5: **4 Punkte**

1. Untersuchen Sie die Folge $a_n = \frac{n+1}{n^2-1}$, $n \geq 2$, auf Konvergenz.

2. Schreiben Sie $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{1024}$ mit Summenzeichen.

Aufgabe 6: **4 Punkte**

Auf Straßenschildern bedeutet 20% Steigung, dass auf einer horizontal gemessenen Strecke von 1m ein Höhenunterschied von 20cm vorliegt. In welchem Winkel zur Horizontalen steigt eine Straße mit 15% an? Fertigen Sie eine Skizze an und geben Sie Ihr Ergebnis im Grad-Maß an.

Aufgabe 7: **4 Punkte**

Für die optimale Ausrichtung von Sonnenkollektoren ist der Höhenwinkel h der Sonne wichtig. Für seine Berechnung verwendet man in der Astronomie die Formel $h = \arcsin(\cos\delta\cos\theta\cos\varphi + \sin\delta\sin\varphi)$. Hierbei bezeichnet φ den Breitengrad des Ortes für den man sich interessiert, δ ist der von der Jahreszeit abhängige Winkel zwischen der Position der Sonne und der Äquatorialebene und θ ist der von der Tageszeit abhängige Stundenwinkel. Der Höchststand zur Mittagszeit wird bei $\theta = 0$ erreicht, daher gilt

$$h_{\max} = \arcsin(\cos\delta\cos\varphi + \sin\delta\sin\varphi).$$

1. Benutzen Sie die Symmetrieeigenschaften der Sinus-Funktion und ein geeignetes Additionstheorem um $\cos\delta\cos\varphi + \sin\delta\sin\varphi = \cos(\delta - \varphi)$ zu zeigen.

2. Schreiben Sie mit Hilfe der Periodizität der Cosinus-Funktion $\cos(\delta-\varphi)$ als Sinus-Funktion und zeigen Sie schließlich, dass gilt $h_{\max} = \frac{\pi}{2} - \varphi + \delta$.

Aufgabe 8: **4 Punkte**

Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^3$. Verschieben Sie den Graph der Funktion um 1 nach oben. Stauchen Sie anschließend die so entstanden Funktion mit dem Faktor $0,5$ und verschieben Sie sie parallel zur y-Achse um 2 nach rechts. Wie lautet die Funktionsvorschrift zu dem so entstandenen Schaubild?

Aufgabe 9: **4 Punkte**

Erläutern Sie Ihre Ergebnisse jeweils mit Hilfe eines Beispiels:

1. Gibt es nicht-leere Mengen M, N mit $M \cup N \subseteq M$?

2. Gibt es Funktionen die weder injektiv noch surjektiv sind?

Aufgabe 10: **4 Punkte**

1. Zeichnen Sie die Menge $M = \{\, z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}((1+2i)z) = 0 \,\}$. Tipp: setzen Sie $z = x + iy$ ein.

2. Verständnisfragen: Entspricht die Multiplikation mit einer komplexen Zahl anschaulich einer Verschiebung? Haben in $\mathbb{C}$ alle Zahlen außer 0 und i ein multiplikatives Inverses? Gilt für $z \in \mathbb{C}$ immer $z + \overline{z} \in \mathbb{R}$? Begründen Sie Ihre Antworten.

3. Schreiben Sie $z = -3 + 4i$ in der Form $z = re^{i\varphi}$ und $z = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$ in der Form $z = x + iy$.

Aufgabe 11: **4 Punkte**

Richtig oder falsch: Es gilt $\binom{4}{2} = \binom{6}{3} = \binom{8}{4}$. Begründen Sie Ihre Antwort. Zählen Sie die 5 Grundaufgaben der Kombinatorik mit den zugehörigen Formeln auf.

Sie dürfen maximal 6 Aufgaben abgeben, können also 24 Punkte erzielen. Gewertet wird das Blatt jedoch nur mit 16 Punkten, das heißt 8 Bonuspunkte sind möglich. Nach Weihnachten bekommen Sie eine Musterlösung! Wir wünschen Ihnen trotzdem erholsame Feiertage, einen guten Rutsch und weiterhin viel Spaß und Erfolg für Ihr Studium!