Dr. Susanne Knies, Philipp Nägele 25.6.2013

Mathematik II für Naturwissenschaftler

SS 2013 — Blatt 10

Abgabe: Dienstag, den 2. Juli

Aufgabe 1: **4+4 Punkte!**

Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 1,5 \\ -3 & -2,5 \end{pmatrix}$.

1. Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A.
2. Berechnen Sie die Eigenwerte von A.
3. Geben Sie zugehörige Eigenvektoren u, v in parametrisierter Form an.
4. Sei nun $w = (-\frac{1}{2}, -2)$. Finden Sie $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$, so dass gilt $w = \lambda u + \mu v$ und berechnen Sie Aw und $A(\lambda u + \mu v) = \lambda Au + \mu Av$.

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Sei folgende Leslie-Matrix

$$L = \begin{pmatrix} 0,1 & 1,4 & 0,5 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben.

1. Rechnen Sie nach, dass

$$u = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ und } w = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

   Eigenvektoren von L sind und geben Sie die zugehörigen Eigenwerte an.

2. Wie wird sich eine Population mit der Anfangsverteilung $a_0 = (39, 5, 30)$ langfristig entwickeln? **Anleitung:** Stellen Sie a_0 als Linearkombination von u, v und w dar. Mit dieser Darstellung können Sie entscheiden, wogegen $L^n a_0$ für $n \to \infty$ konvergiert.

Aufgabe 3: **4 Punkte**

1. Die Matrix B sei gegeben durch

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}.$$

   Zeigen Sie, dass die Einheitsvektoren $e_i, i = 1, 2, 3, 4$ Eigenvektoren der Matrix B sind und geben Sie die zugehörigen Eigenwerte an.

2. Das Kronecker-Delta sei für $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ definiert durch

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ falls } i = j \\ 0 \text{ falls } i \neq j \end{cases}.$$

   Wir definieren außerdem eine Matrix C mit Einträgen C_{ij}, $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ durch $C_{ij} := B_{ji} + \delta_{ij}$, wobei B_{ij}, $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ die Einträge der Matrix B aus dem ersten Teil sind. Wie sieht die Matrix C aus? Zeigen Sie außerdem, dass die Einheitsvektoren $e_i, i = 1, 2, 3, 4$ auch Eigenvektoren von C sind und geben Sie die zugehörigen Eigenwerte an.

Aufgabe 4: **6 Punkte**

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ und $D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

1. Berechnen Sie die Determinanten von A, B, D_φ und von $AB, BA, D_\varphi B$.
2. Für welche $\varphi \in \mathbb{R}$ besitzt D_φ reelle Eigenwerte?
3. Berechnen Sie die (komplexen!) Eigenwerte von D_φ für $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

Anwesenheitsaufgaben zu Blatt 10

Aufgabe 1:

Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$

1. Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A.
2. Berechnen Sie die Eigenwerte von A.
3. Geben Sie zugehörige Eigenvektoren in parametrisierter Form an.

Aufgabe 2:

1. Geben Sie alle Lösungen der Differentialgleichung $h'(x) = x + 3$ an.
2. Geben Sie Lösungen der Differentialgleichung $f'' + f = 0$ an.
3. Finden Sie eine Lösung der Differentialgleichung $g'' + g = 0$ mit $g(0) = 1$. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Ergebnis des vorhergehenden Aufgabenteils.
4. Finden Sie eine Lösung u der Differentialgleichung $u' = 3u$ mit $u(0) = 2$