Dr. Susanne Knies, Philipp Nägele 2.7.2013

Mathematik II für Naturwissenschaftler

SS 2013 — Blatt 11

Abgabe: Dienstag, den 9. Juli

Aufgabe 1: **4 Punkte**

1. Bestimmen und skizzieren Sie die Lösungen P_1, P_2 der logistischen Differentialgleichung

$$P'(t) = \frac{1}{20}\big(10 - P(t)\big)P(t)$$

mit den Anfangswerten $P_1(0) = 2$ und $P_2(0) = 20$

2. Bestimmen und skizzieren Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$P'(t) = \frac{1}{3}\big(P(t) - 3\big)P(t)$$

mit $P(0) = 4$. Berechnen Sie den Wert t_∞ für den gilt $\lim_{t \uparrow t_\infty} P(t) = \infty$.

Aufgabe 2: **4 Punkte**

1. Rechnen sie nach, dass $P(t) = P_0(1+t)^a e^{-bt}$ die Differentialgleichung $P'(t) = \left(\frac{a}{1+t} - b\right)P(t)$ mit $P(0) = P_0$ löst.
2. Wie verhält sich die Lösung für $t \to \infty$?

Aufgabe 3: **4 Punkte**

In einem Stromkreis sind eine zeitabhängige Spannungsquelle $U(t)$, ein konstanter Widerstand R und eine konstante Induktivität L hintereinandergeschaltet. Die Stromstärke $I(t)$ erfüllt dann die Differentialgleichung

$$LI'(t) + RI(t) = U(t).$$

Berechnen Sie $I(t)$ mit Hilfe der Lösungsformel und berechnen Sie das darin enthaltene Integral explizit im Fall konstanter Spannung $U(t) = U_0$.

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Auf die kommenden Klausuren werden Sie hoffentlich lernen, einiges davon jedoch leider auch wieder vergessen. Sei $p(t)$ der Prozentsatz der Stoffmenge, die Sie nach t Zeiteinheiten noch parat haben, das heisst insbesondere gilt $p(0) = 100$. Da Sie gründlich gelernt haben, werden Sie einen gewissen Prozentsatz b, $0 < b < 100$, des Lernstoffs niemals vergessen. Wir nehmen an, dass Ihre Vergessensrate $p'(t)$ zur Zeit t mit einem Proportionalitätsfaktor a proportional zu der Stoffmenge zur Zeit t ist, die Sie noch vergessen können, also zu $p(t) - b$. Formulieren Sie das zugehörige Anfangswertproblem und lösen Sie es mit den gleichen Methoden, die Sie für Aufgabe 3 verwendet haben.

Anwesenheitsaufgaben zu Blatt 10

Aufgabe 1:

1. Lösen Sie die Differentialgleichung $u'(t) = \sin(t)u(t)$ mit $u(0) = 5$.
2. Lösen Sie die Differentialgleichung $v'(t) = \sin(t)v(t) + (t+2)^2$ mit $v(0) = 2$.

Aufgabe 2:

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und sei $F(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(s)\,ds$. Für eine stetig differenzierbare Funktion $x : [a,b] \to \mathbb{R}$ definieren wir die "Energie entlang von x" durch $E(x(t)) := \frac{1}{2}(x'(t))^2 + F(x(t))$. Zeigen Sie: Falls $x_1 : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Diffentialgleichung $x_1''(t) = -f(x_1(t))$ ist, so ist die Energie entlang von x_1 konstant in der Zeit.