Dr. Susanne Knies, Philipp Nägele 9.7.2013

Mathematik II für Naturwissenschaftler

SS 2013 — Blatt 12

Abgabe: Dienstag, den 16. Juli

Aufgabe 1: **6 Punkte**

Betrachten Sie das lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} x' &= 3x + 2y \\ y' &= -3x - 2,5y \end{aligned}$$

1. Schreiben Sie das System in vektorieller Schreibweise $z' = Az$.
2. Berechnen Sie die allgemeine Lösung z des Systems.
3. Finden Sie eine Lösung z mit $z(0) = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Betrachten Sie die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$x'' + x' - x = 0.$$

1. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom der Gleichung und dessen Nullstellen.
2. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Gleichung.
3. Bestimmen Sie eine Lösung der Gleichung mit $x(0) = x'(0) = 1$.
4. Bestimmen Sie eine Lösung der Gleichung mit $x(0) = 1$ und $x'(0) = 0$.

Aufgabe 3: **6 Punkte**

1. Lösen Sie die folgende Differentialgleichung mit Hilfe der Lösungsformel:

$$u'(t) + \frac{u(t)}{t} = \frac{1}{t^2}, \quad u(1) = 1.$$

2. Rechnen Sie nach, dass Ihre so konstruierte Lösung die Differentialgleichung tatsächlich löst, das heisst, dass insbesondere $u(1) = 1$ gilt.
3. Wie verhält sich die Lösung u für $t \to \infty$?

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Gegeben sei das Räuber-Beute Modell

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = F(x,y) = \begin{pmatrix} x(1 - \frac{1}{2}y) \\ y(\frac{1}{3}x - 1) \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die beiden stationären Punkte $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ und $\rho = (\rho_1, \rho_2)$ des Systems. Skizzieren Sie anschließend das Vektorfeld F in der Nähe der stationären Punkte, indem Sie das Vektorfeld entlang von Geraden der Form $g(y) = (\eta_1, y)$ und $h(x) = (x, \eta_2)$ auswerten. Gehen Sie in der Nähe von ρ analog vor.

Anwesenheitsaufgaben zu Blatt 12

Aufgabe 1:
Betrachten Sie das lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} x' &= 3x + 2y \\ y' &= -5x - 4y \end{aligned}$$

1. Schreiben Sie das System in vektorieller Schreibweise $z' = Az$.
2. Berechnen Sie die allgemeine Lösung z des Systems, indem Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A berechnen.
3. Finden Sie eine Lösung z mit $z(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2:

1. Lösen Sie die folgende Differentialgleichung mit Hilfe der Lösungsformel:

   $$u'(t) + \frac{u(t)}{t} = \frac{1}{t}, \quad u(1) = 1.$$

   Bemerkung: Beachten Sie $t_0 \neq 0$!

2. Überzeugen Sie sich durch direktes Nachrechnen davon, dass die Formel wieder eine Lösung liefert. Dazu gehört immer auch der Anfangswert!