Dr. Susanne Knies, Philipp Nägele 23.4.2013

Mathematik II für Naturwissenschaftler

SS 2013 — Blatt 1

Abgabe: Dienstag, den 30. April

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Eine Urne enthalte drei rote, zwei grüne und fünf schwarze Kugeln, die blind gezogen und nach der Ziehung wieder zurückgelegt werden.

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei zwei Ziehungen genau eine rote und eine schwarze Kugel gezogen wird?

2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich bei zwei Ziehungen unter den gezogenen Kugeln keine grüne befindet?

3. Nun wird ohne Zurücklegen gezogen. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei der zweiten Ziehung eine grüne Kugel gezogen wird, unter der Voraussetzung, dass bei der ersten Ziehung keine schwarze Kugel gezogen wurde?

Aufgabe 2: **6 Punkte**

Für eine Studie in einer Risikogruppe lieferte der *Elisa*-Test folgende Daten

	A^+: infiziert	A^-: nicht infiziert	
B^+: positives Testerg.	2997	35	3032
B^-: negatives Testerg.	3	6965	6968
$\sum$	3000	7000	10000

1. Berechnen Sie Prävalenz $P(A^+)$ und die Wahrscheinlichkeit eines positiven Befundes $P(B^+)$.

2. Berechnen Sie Sensitivität $P(B^+|A^+)$ und Spezifität $P(B^-|A^-)$ des *Elisa*-Tests.

3. Berechnen Sie mit Hilfe der Bayes'schen Formel die Wahrscheinlichkeit dafür, krank zu sein, unter der Voraussetzung eines positiven Testergebnisses, das heißt $P(A^+|B^+)$, und berechnen Sie zusätzlich auch die Verlässlichkeit eines negativen Befundes $P(A^-|B^-)$.

4. Besprechen Sie den Unterschied des von Ihnen brechneten Wertes von $P(A^+|B^+)$ zum Ergebnis aus der Vorlesung (ca. $0,17$) (ohne Punkte!).

bitte Wenden!

Aufgabe 3: **6 Punkte**

Ihr handwerklich hochbegabter Freund hat aus Langeweile ein Glücksrad mit zwei Sektoren gebaut, die mit den Zahlen 1 und 2 markiert sind. Die Größe der Sektoren hat er dabei so gewählt, dass sich folgende Wahrscheinlichkeiten ergeben:

	Sektor 1	Sektor 2
Wahrscheinlichkeit	$0,2$	$0,8$

Nun schlägt er Ihnen folgendes Spiel vor: Sie zahlen ihm einen Euro und drehen dann zweimal am Glücksrad. Sind die zwei Zahlen verschieden verlieren Sie Ihren Einsatz, treffen Sie zweimal die "1" gibt er Ihnen 75 Euro und treffen Sie zweimal die "2" müssen Sie mit ihm Sonntag morgens um fünf Uhr ins "Café Ruef", ihm zwei Schinkencroissants für insgesamt 3 Euro kaufen und zuschauen wie er sie verspeist, selbstverständlich ohne mit Ihnen zu teilen.

1. Definieren Sie die Ergebnismenge Ω, sowie die Wahrscheinlichkeitsverteilung $P : \Omega \to [0, 1]$.
2. Bestimmen Sie eine Zufallsvariable, die unter Berücksichtigung Ihres Einsatzes Ihren Gewinn und Verlust angibt. Berechnen Sie außerdem die induzierten Wahrscheinlichkeiten $P(x)$ für alle $x \in X(\Omega)$.
3. Hat Ihnen Ihr Freund ein faires Spiel vorgeschlagen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Anwesenheitsaufgaben zu Blatt 2

Aufgabe 1:
Sie schlagen Ihrem Freund folgendes Spiel vor: Sie zahlen ihm 20 Euro und werfen dann drei Mal eine faire Münze. Erscheint dreimal "Kopf" zahlt Ihnen Ihr Freund 100 Euro, bei zweimal "Kopf" bekommen Sie Ihr Geld zurück und erscheint einmal oder keinmal "Kopf" darf er Ihr Geld behalten.

1. Geben Sie die Ergebnismenge Ω zu diesem Spiel an.
2. Definieren Sie eine Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ die Ihre Auszahlung angibt.
3. Berechnen Sie den Erwartungswert $E(X)$ sowie $E(Y)$ wobei die Zufallsvariable Y definiert sei als $Y = X - 20$.
4. Ist dieses Spiel fair?

Aufgabe 2:
Sie stehen als Kandidat einer Spielshow vor drei geschlossenen Türen. Hinter einer der Türen verbirgt sich der Hauptgewinn und hinter den beiden anderen Türen jeweils eine Ziege. Sie werden vom Moderator aufgefordert eine Tür auszuwählen. Darauhin öffnet er eine andere Tür hinter der eine Ziege steht und fragt Sie, ob Sie bei Ihrer Wahl bleiben oder umwählen wollen. Wie würden Sie sich entscheiden? **Tipp:** Überlegen Sie sich, wie Sie entscheiden würden, wenn bei 100 Türen hinter 99 Türen Ziegen stehen würden und der Moderator Ihnen nach Ihrer ersten Wahl anstatt einer, 98 Türen öffnen würde.