Dr. Susanne Knies, Philipp Nägele 28.5.2013

Mathematik II für Naturwissenschaftler

SS 2013 — Blatt 6
Abgabe: Dienstag, den 4. Juni

Aufgabe 1: **4 Punkte**

1. Berechnen Sie

   (a)
   $$\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\1,5\end{pmatrix}$$
   (b)
   $$\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}$$

2. Berechnen Sie $4(1,3,5)\cdot(-1,\frac{1}{2},0)$.

3. Skizzieren Sie $(2,1)+r(3,2)$, $r\in[0,1]$.

Aufgabe 2: **4+2 Punkte**

Sei $K=\{\ x\in\mathbb{R}^2 \mid \|x\|\leq 2\ \}\subset\mathbb{R}^2$ der Kreis um den Ursprung mit Radius 2.

1. Zeigen, dass für $x_0=(1,1)$ und $y_0=(-2,0)$ gilt $x_0,y_0\in K$.

2. Skizzieren Sie $z_n:=\frac{1}{n}x_0+(1-\frac{1}{n})y_0$ für $n=2,3,4$.

3. **Zusatz:** Zeigen Sie nun allgemein: für alle $x,y\in K$ und alle $\alpha\in[0,1]$ gilt $\alpha x+(1-\alpha)y\in K$. **Tipp:** benutzen Sie die Dreiecksungleichung.

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Seien x,y zwei Punkte auf einer Sphäre mit Radius R ausgedrückt in Kugelkoordinaten, das heisst:

$$x=R(\cos\vartheta_x\cos\varphi_x,\cos\vartheta_x\sin\varphi_x,\sin\vartheta_x)$$
$$y=R(\cos\vartheta_y\cos\varphi_y,\cos\vartheta_y\sin\varphi_y,\sin\vartheta_y).$$

1. Berechnen Sie das Skalarprodukt $x\cdot y\in\mathbb{R}$.

2. Berechnen Sie den Winkel zwischen x und y.

3. Sei nun $x_{\text{Freiburg}}=(\vartheta_F,\varphi_F)=(48°\text{N},7,8°\text{O})$ und $y_{\text{Moskau}}=(\vartheta_M,\varphi_M)=(55,7°\text{N},37,6°\text{O})$. Berechnen Sie den Abstand der beiden Orte, gemessen auf der Erdoberfläche. Benutzen Sie dazu $R=6378$ km und stellen Sie Ihren Taschenrechner richtig ein.

Aufgabe 4: **4 Punkte**

1. Sei $x = (2, -3)$ und $y = (3, 0)$. Skizzieren Sie $x, y, x + y$ und $x - y$ und zeigen Sie $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.
2. Seien nun x und y zwei beliebige Vektoren in $\mathbb{R}^n$. Rechnen Sie nach, dass die Parallelogrammgleichung gilt, das heisst:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

   Beachten Sie dazu, dass für einen vektor $z \in \mathbb{R}^n$ gilt $\|z\|^2 = z \cdot z$.

Anwesenheitsaufgaben zu Blatt 6

Aufgabe 1:

1. Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\| = \|y\|$. Zeigen Sie, dass dann $x + y$ und $x - y$ senkrecht aufeinander stehen.
2. Leiten Sie mit Hilfe von Teil 1 den Satz von Thales her: "Liegt der Punkt C eines Dreiecks ABC auf einem Halbkreis über der Strecke AB, dann hat das Dreieck bei C immer einen rechten Winkel". **Tipp:** Machen Sie ein Skizze und wählen Sie dabei den Mittelpunkt der Strecke AB als Ursprung Ihres Koordinatensystems.

Aufgabe 2:
Welche der folgenden Vektoren stehen senkrecht aufeinander:

$$(1, 2),\ (-2, -1),\ (3, 4),\ r(-1, -0, 5).$$