Dr. Susanne Knies, Philipp Nägele 11.6.2013

Mathematik II für Naturwissenschaftler

SS 2013 — Blatt 8

Abgabe: Dienstag, den 18. Juni

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem mit Hilfe des Gauss'schen Eliminationsverfahrens und **ohne GTR!** Geben Sie dabei Ihre Zwischenschritte an und überprüfen Sie Ihr Ergebnis durch Einsetzen.

1.

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 6 \\ -3x + 2y - z &= 2 \\ x + 2y + 3z &= 10 \end{aligned}$$

2. Erklären Sie, was die eindeutige Lösbarkeit des Gleichungssystems anschaulich bedeutet.

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Entscheiden Sie für die folgenden Matrizen A, B, C, welche der Matrixprodukte AB, BA, AC, CA, BC, CB definiert sind und berechnen Sie diese ohne GTR.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Sei $A_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, für ein $a \in \mathbb{R}$.

1. Brechnen Sie $A_a^2 = A_a A_a$ und $A_a^3 = A_a^2 A_a$ und A_a^{417}.

2. Berechnen und skizzieren Sie $A_1 v$, $A_1^2 v$ und $A_1^3 v$ für $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. Sei nun $Q = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \in [0, 1] \}$, das heißt Q ist ein Quadrat der Kantenlänge 1. Skizzieren Sie die Menge $R = \{ A_2 w \mid w \in Q \}$.

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Geben Sie die Hesseform der Ebene durch die Punkte $x = (1, 0, 0), y = (0, 2, 0)$ und $z = (0, 0, 3)$ an. **Tipp:** Anwesenheitsaufgabe 1.

Anwesenheitsaufgaben zu Blatt 8

Aufgabe 1:
Für zwei Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^3$, $a = (a_1, a_2, a_3)$ und $b = (b_1, b_2, b_3)$ ist das Kreuzprodukt $a \times b \in \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$a \times b := \begin{pmatrix} a_2 b_3 - b_2 a_3 \\ a_3 b_1 - b_3 a_1 \\ a_1 b_2 - b_1 a_2 \end{pmatrix}$$

1. Zeigen Sie, dass $a \times b$ sowohl auf a als auch auf b senkrecht steht.
2. Überprüfen Sie die Aussage anhand der Vektoren $u = (1, 0, 0)$ und $v = (0, 2, 0)$.
3. Überprüfen Sie anhand von u und v, dass gilt $a \times b = -b \times a$.

Bemerkung (ohne Beweis):
Sei $a \neq 0$, $b \neq 0$ und $\varphi \in [0, \pi]$ der Winkel zwischen a und b. Dann gilt:

$\|a \times b\| = \|a\| \|b\| \sin\varphi =$ Fläche des von a und b aufgespannten Parallelogramms

Aufgabe 2:
Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Zeigen Sie $AB \neq BA$.
2. Durch $x \mapsto Ax$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ wird eine Abbildung $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert. Was bewirkt diese Abbildung anschaulich?