Dr. Susanne Knies, Philipp Nägele 18.6.2013

Mathematik II für Naturwissenschaftler

SS 2013 — Blatt 9

Abgabe: Dienstag, den 25. Juni

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Es sei bekannt, dass Harnstoff $(NH_2)_2CO$ mit salpetriger Säure HNO_2 zu Kohlendioxid CO_2, Stickstoff N_2 und Wasser H_2O reagiert. Die Reaktionsgleichung lautet:

$$x_1 \cdot (NH_2)_2CO + x_2 \cdot HNO_2 = x_3 \cdot CO_2 + x_4 \cdot N_2 + x_5 \cdot H_2O.$$

In welchen Verhältnissen findet diese Reaktion statt? **Anleitung:** Führen Sie neue Variablen $y_i := \frac{x_i}{x_1}, i = 1,2,3,4,5$ ein. Finden Sie vier weitere Gleichungen für die y_i indem Sie die Anzahl der Atome in der Reaktionsgleichung vergleichen. Bedenken Sie außerdem, dass Moleküle nur in ganzzahligen Verhältnissen miteinander reagieren.

Aufgabe 2: **4 Punkte**

1. Bestimmen Sie die Inverse Matrix A^{-1} von
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Bestimmen Sie die Inverse Matrix B^{-1} von
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Bestimmen Sie die Lösung $x \in \mathbb{R}^3$ der Gleichung $Bx = c_i$ für $c_1 = (1,2,2)$ und $c_2 = (1,0,1)$.

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Sei $Q = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x,y \in [-1,1] \}$. Skizzieren Sie die Menge $R = \{ Aw \mid w \in Q \}$. Was bewirkt die von A induzierte lineare Abbildung $L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L_A(w) := Aw$?

2. Berechnen Sie den Flächeninhalt $|R|$ von R und zeigen Sie $|R| = |\det(A)||Q|$.

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Geben Sie eine parametrisierte Form und die Dimension der Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems für $c = 3$ und $c = 6$ an:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 17x_4 + 9x_5 &= 5 \\ x_2 + 4x_3 + x_5 &= 6 \\ (c-3)x_5 &= 6 \end{aligned}$$

Bonusaufgabe: **4 Punkte**

Sei $D \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ und $L_D : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L_D(w) := Dw$, die von D induzierte Abbildung. Eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ heißt **orthogonal**, falls für alle $u, v \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$u \cdot v = Lu \cdot Lv.$$

Zeigen Sie, dass L_D orthogonal ist. **Tipp:** Zeigen Sie die Behauptung zunächst für e_1 und e_2. Drücken Sie beliebige Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^2$ dann als Linearkombination von e_1 und e_2 aus und nutzen Sie die Linearität von L_D und des Skalarprodukts aus. Ist es anschaulich klar, dass L_D orthogonal ist?

Anwesenheitsaufgaben zu Blatt 9

Aufgabe 1:
Sei $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $u = (1, 1)$ und $v = (0, 1)$.

1. Zeigen Sie, dass für alle $w \in \mathbb{R}^2$ eindeutige Zahlen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ existieren mit $w = \lambda u + \mu v$.
2. Sei $L_B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L_B(w) := Bw$ die von B induzierte lineare Abbildung und $w_0 = (2, 3)$. Finden Sie λ_0 und μ_0 mit $w_0 = \lambda_0 u + \mu_0 v$ und zeigen Sie $L_B(w_0) = L_B(\lambda_0 u + \mu_0 v) = \lambda_0 L_B(u) + \mu_0 L_B(v)$.

Aufgabe 2:
Geben Sie die parametrisierte Form und die Dimension der Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems an:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 &= 1 \\ 2x_2 + x_2 + 4x_3 &= 4 \\ 7x_3 &= 21. \end{aligned}$$

Aufgabe 3:
Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}$. Finden Sie eine Lösung $x_i \in \mathbb{R}^2$ der inhomogenen Gleichung $Ax = 5$. Geben Sie anschliessend eine parametrisierte Form der Lösungsmenge L der homogenen Gleichung $Ax = 0$ an. Zeigen Sie: Jeder Vektor $y \in \mathbb{R}^2$ der Form $y = x_i + sx_h$, wobei $s \in \mathbb{R}$ und $x_h \in L$ eine beliebige Lösung der homogenen Gleichung ist, ist ebenfalls eine Lösung der inhomogenen Gleichung $Ax = 5$. **Bemerkung:** Die entsprechende Aussage gilt auch für lineare Gleichungssysteme in höheren Dimensionen.