Dr. Susanne Knies, Sarah Eckstein 20.12.2013

Mathematik I für Naturwissenschaftler

WS 2013/14 — Blatt 10

Abgabe: Montag, den 13. Januar, vor der Vorlesung

Die Übungsblätter finden Sie auch unter
http://home.mathematik.uni-freiburg.de/mfnw/

Aufgabe 1: **4 Punkte**

a) Skizzieren Sie den Graph von $g : [-4, 1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = 3x+5$. Berechnen Sie außerdem die Umkehrfunktion g^{-1} unter Angabe des Definitions- und Wertebereichs und zeichnen Sie den Graph von g^{-1}.

b) Welcher geometrische Zusammenhang besteht zwischen dem Graph von g und dem von g^{-1}?

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Zu einer Party haben Sie für Ihre Gäste Bier gekauft. Sie haben von drei Sorten jeweils 24 Flaschen im Keller und wollen einige Flaschen im Kühlschrank kalt stellen. Der Kühlschrank fasst aber nur 12 Flaschen. Wie groß ist die Anzahl der Möglichkeiten, 12 Flaschen auszuwählen und im Kühlschrank zu verstauen?
Tipp: Fertigen Sie zunächst eine Skizze anhand des Bücherregalmodells aus dem Skript an. Inwiefern ist die Angabe, dass 24 Flaschen je Sorte vorhanden sind, relevant?

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Begründen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes, dass $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ gilt.

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Skizzieren Sie folgenden Funktionen (ohne GTR!) und erläutern Sie Ihre Ergebnisse!

a) $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$,

b) $g(x) = \frac{3x^2-9}{4x^2-4}$.

Aufgabe 5: **4 Punkte**

a) Untersuchen Sie die Folge $a_n = \frac{n+1}{n^2-1}$, $n \geq 2$, auf Konvergenz.

b) Untersuchen Sie die Folge $b_n = \left(2 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{n-2}{2n+2}\right)$, $n \geq 1$, auf Konvergenz.

c) Schreiben Sie $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{1024}$ mit Summenzeichen.

Aufgabe 6: **4 Punkte**

Eine Basketballmannschaft besteht aus 9 Spielerinnen.

a) Wie viele Möglichkeiten hat die Trainerin, 5 Startspielerinnen auszuwählen?

b) Nach der Halbzeitpause sollen 3 der Startspielerinnen und 2 der Spielerinnen, die bisher noch nicht gespielt haben, aufs Feld. Wieviele solcher Kombinationen sind möglich?

Aufgabe 7: **4 Punkte**

Bestimmen Sie den Radius und die Höhe einer Dose vom Volumen V=1 Liter so, dass der Flächeninhalt der Oberfläche minimal wird.

Aufgabe 8: **4 Punkte**

Berechnen Sie jeweils das Taylorpolynom der Ordnung fünf im Punkt $x_0 = 0$.

a) $f(x) = e^x$.

b) $g(x) = \sin x$.

Aufgabe 9: **4 Punkte**

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \sin x$. Geben Sie die Gleichungen der Tangenten an f in den Punkten $x_1 = \frac{\pi}{2}$ und $x_2 = \pi$ an. Berechnen Sie dann den Schnittpunkt dieser beiden Geraden.

Aufgabe 10: **4 Punkte**

Gegeben sei $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{1}{2}x^2$. Laut Mittelwertsatz gibt es ein $\xi \in [0, 3]$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0}.$$

a) Berechnen Sie ξ.

b) Fertigen Sie eine Skizze von f an und tragen Sie in diese Skizze die Gerade ein, die durch die Punkte $(0, f(0))$ und $(3, f(3))$ geht.

c) Tragen Sie in die Skizze aus Teil b) außerdem die Tangente an f im Punkt ξ ein. Geben Sie die Geradengleichung dieser Tangente an.

Sie dürfen maximal 6 dieser 10 Aufgaben abgeben, können also 24 Punkte erzielen. Gewertet wird das Blatt jedoch nur mit 16 Punkten, das heißt 8 Bonuspunkte sind möglich. Nach Weihnachten bekommen Sie eine Musterlösung! Wir wünschen Ihnen trotzdem erholsame Feiertage, einen guten Rutsch und weiterhin viel Spaß und Erfolg für Ihr Studium!

Die Aufgaben 11-14 sind zum Selbststudium :)

Aufgabe 11:

a) Zeigen Sie: $\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$.

b) Vereinfachen Sie: $\ln(x^2 - y^2) + \ln(\frac{1}{x-y})$, $x > y \geq 0$.

c) Vereinfachen Sie: $\ln(x^{\frac{2}{3}}) - \ln(\sqrt[3]{x^{-4}})$.

Aufgabe 12:

Für die optimale Ausrichtung von Sonnenkollektoren ist der Höhenwinkel h der Sonne wichtig. Für seine Berechnung verwendet man in der Astronomie die Formel $h = \arcsin(\cos\delta\cos\theta\cos\varphi + \sin\delta\sin\varphi)$. Hierbei bezeichnet φ den Breitengrad des Ortes für den man sich interessiert, δ ist der von der Jahreszeit abhängige Winkel zwischen der Position der Sonne und der Äquatorialebene und θ ist der von der Tageszeit abhängige Stundenwinkel. Der Höchststand zur Mittagszeit wird bei $\theta = 0$ erreicht, daher gilt

$$h_{\max} = \arcsin(\cos\delta\cos\varphi + \sin\delta\sin\varphi).$$

a) Benutzen Sie die Symmetrieeigenschaften der Sinus-Funktion und ein geeignetes Additionstheorem um $\cos\delta\cos\varphi + \sin\delta\sin\varphi = \cos(\delta - \varphi)$ zu zeigen.

b) Schreiben Sie mit Hilfe der Periodizität der Cosinus-Funktion $\cos(\delta - \varphi)$ als Sinus-Funktion und zeigen Sie schließlich, dass gilt $h_{\max} = \frac{\pi}{2} - \varphi + \delta$.

Aufgabe 13:

a) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}$ mit Hilfe der Regel von l'Hospital. Überzeugen Sie sich zunächst davon, dass die Voraussetzungen erfüllt sind.

b) Können Sie mit Hilfe des ersten Aufgabenteils auf die Existenz des Grenzwerts $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}\ln(\cos x)}$ schließen? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

Aufgabe 14:

Das Referenzformat für die Papiergröße DIN$A0 =: A(0)$ hat die Seitenlängen $2^{\frac{1}{4}}$ Meter und $2^{-\frac{1}{4}}$ Meter. Hiervon ausgehend erhält man das Format $A(n)$, $n \geq 1$, indem man beim Format $A(n-1)$ die längere Seite halbiert, das heißt $S_0 = 2^{\frac{1}{4}}\text{m}$, $S_1 = 2^{-\frac{1}{4}}\text{m}$, $S_{n+1} = \frac{S_{n-1}}{2}$ und $A(n)$ hat die Seitenlängen S_n und S_{n+1}.

a) Mit $F(n)$ werde die Fläche von $A(n)$ bezeichnet. Berechnen sie $F(0)$ und geben Sie eine Formel für $F(n)$ in Abhängigkeit von n an. Wie groß ist $F(4)$?

b) Bestimmen Sie das Format $A(4)$, indem sie die Seitenlängen rekursiv berechnen. Berechnen Sie außerdem $F(4)$ und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem für $F(4)$ aus dem ersten Teil.