Dr. Susanne Knies, Sarah Eckstein 13.01.2014

Mathematik I für Naturwissenschaftler

WS 2013/14 — Blatt 11

Abgabe: Montag, den 20. Jauar, vor der Vorlesung

Die Übungsblätter finden Sie auch unter http://home.mathematik.uni-freiburg.de/mfnw/

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Berechnen Sie:

a) $\int\limits_{-1}^{1} \cosh x \, dx$, b) $\int\limits_{-\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \sin x + x^3 - e^{-x} \, dx$

Berechnen Sie mittels partieller Integration:

c) $\int\limits_{0}^{\pi} x \cos x \, dx$, d) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x \, dx$

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Geben Sie die Funktionsvorschrift für eine Parabel mit Nullstellen bei $x_1 = -1$ und $x_2 = 3$ an, die zusätzlich zwischen den Nullstellen mit der x-Achse eine Fläche der Größe 4 einschließt.

Gibt es zu dieser Parabel eine Stammfunktion, die durch den Punkt $(0, 5)$ geht? Falls ja, geben Sie diese an. Falls nein, begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3 (Newtonsches Abkühlungsgesetz): **4 Punkte**

Befindet sich ein Gegenstand der Anfangstemperatur $u(0) = u_0$ in einem Raum mit konstanter Temperatur a, so wird die Temperaturänderung des Gegenstands durch die Gleichung

$$u'(t) = -k(u(t) - a)), \, t > 0, \qquad u(0) = u_0 \qquad (*)$$

beschrieben. Dabei ist u_0 die Anfangstemperatur des Gegenstands, a ist die konstante Raumtemperatur, k die konstante Abkühlungsrate und $u(t)$ die Temperatur des Gegenstands zum Zeitpunkt t.

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $u(t) = a + (u(0) - a)e^{-kt}$ die Gleichung $(*)$ löst.

b) Sie haben $150\,ml$ $85°\,C$ heißen Kaffees und $50\,ml$ $10°\,C$ kalter Milch und möchten einen Milchkaffee trinken. Da Sie nur wenig Zeit haben, sollte der Kaffee so schnell wie möglich auf Trinktemperatur ($58°C$) abkühlen. Ist es sinnvoller, zuerst die Milch mit dem Kaffee zu vermischen und dann zu warten, oder sollten Sie die Milch lieber erst am Ende in den Kaffee geben? Nehmen Sie $k = 0,025\frac{1}{min}$ und $a = 20°\,C$ an und begründen Sie Ihr Ergebnis.

Hinweis: Die Temperatur einer Mischung von einer Flüssigkeitsmenge p mit der Temperatur T_0 und einer Flüssigkeitsmenge q mit einer Temperatur T_1 führt sofort dazu, dass die Mischungsmenge $p + q$ die Temperatur $\frac{pT_0+qT_1}{p+q}$ hat.

Aufgabe 4: **4 Punkte**

a) Berechnen Sie die folgenden Integrale

$$(i) \int_1^3 \frac{x+1}{x^2+2x}\,dx, \qquad (ii) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x}\,dx \qquad (iii) \int_1^3 2^x\,dx$$

b) Berechnen Sie

$$\int_0^{\pi} \cos^2 x\,dx,$$

indem Sie zunächst $\int_0^{\pi} \cos x \cos x\,dx$ partiell integrieren und dann verwenden, dass $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ gilt.

Aufgabe 5: **4 Punkte**

Wissenschaftler haben herausgefunden, dass der Energieverbrauch eines Wellensittichs in Abhängigkeit von der Fluggeschwindigkeit v näherungsweise durch die Funktion

$$E(v) = \frac{1}{v}\left(\frac{1}{100}(v-20)^2 + 21\right)$$

gegeben ist. Dabei wird E in Kalorien pro Gramm Körpergewicht pro Kilometer Flugstrecke und v in Kilometer pro Stunde gemessen.

a) Wie schnell muss ein Wellensittich fliegen, damit er möglichst wenig Energie verbraucht?

b) Wie hoch ist der optimale Energieverbrauch eines Wellensittichs mit 50 Gramm Körpergewicht auf einer Flugstrecke von 500 Metern?

Hinweis: Sie dürfen maximal 4 dieser 5 Aufgaben abgeben.

Anwesenheitsaufgaben zu Blatt 11

Aufgabe 1:

a) Geben Sie eine Stammfunktion für $f(x) = \ln x$ an, indem Sie $\int 1 \ln x\,dx$ partiell integrieren.

b) Berechnen Sie mittels partieller Integration $\int_0^1 x^2 e^x\,dx$.

c) Sei $g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$, $f(x) \neq 0$. Geben Sie eine Stammfunktion von g an.

d) Geben Sie mit Hilfe von Teil c) eine Stammfunktion von $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$ an.

Aufgabe 2:

a) Geben Sie die Funktionsvorschrift f einer Parabel mit Nullstellen $x_1 = 1$ und $x_2 = 5$ und globalem Maximum bei $H = (3, a)$, $a \in \mathbb{R}$ an.

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche zwischen dem Graph von f und der x-Achse in Abhängigkeit von a.