Dr. Susanne Knies, Sarah Eckstein 20.01.2014

Mathematik I für Naturwissenschaftler

WS 2013/14 — Blatt 12

Abgabe: Montag, den 27. Januar, vor der Vorlesung

Die Übungsblätter finden Sie auch unter http://home.mathematik.uni-freiburg.de/mfnw/

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Berechnen Sie mit Hilfe der angegebenen Substitution den Wert der folgenden Integrale:

a) $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin^2 x}\, dx$, mit $f(y) = \frac{1}{y^2}$ und $g(x) = \sin x$.

b) $\int\limits_0^{\pi} \sin(3x+1)\, dx$.

c) Zeigen Sie, dass $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$ gilt und berechnen Sie dann mit Hilfe der Substitution $f(y) = y^2$ und $g(x) = \tan x$ das Integral $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^2 + (\tan x)^4\, dx$.

Berechnen Sie mit Hilfe der Partialbruchzerlegung (siehe Vorlesung)

d) $\int\limits_{-2}^{2} \frac{1}{(x-3)(x+4)}\, dx$.

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ existieren die uneigentlichen Integrale $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx$ und $\int\limits_0^{1} \frac{1}{x^\alpha}\, dx$?

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Für eine Studie über die Wirksamkeit von Grippeschutzimpfungen wurden 960 Personen danach befragt, ob sie vor dem letzten Winter gegen Grippe geimpft waren und ob sie an Grippe erkrankt waren oder nicht. Die Daten wurden nach geimpft/nicht geimpft und erkrankt/nicht erkrankt ausgezählt, so dass sich folgende Tabelle ergab:

	erkrankt	nicht erkrankt	
geimpft	117	389	506
nicht geimpft	289	165	454
$\sum$	406	554	960

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

a) $A = \{$ „war geimpft“ $\}$.

b) $B = \{$„hatte Grippe“$\}$.

c) Berechnen Sie $P(A \cap B)$ und $P(B \mid A)$ und erklären Sie in eigenen Worten, was diese Wahrscheinlichkeiten bedeuten.

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Stellen Sie sich vor, Sie würfeln einmal mit einem normalen Würfel. Die Ereignismenge Ω ist dann $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Gegeben seien außerdem die Ereignisse

$$\begin{aligned} A &= \{\text{„Die Zahl ist gerade“}\}, \\ B &= \{\text{„Die Zahl ist kleiner oder gleich 4“}\}, \\ C &= \{\text{„Die Zahl ist gerade und kleiner oder gleich 4“}\}. \end{aligned}$$

a) Geben Sie die Ereignisse A, B und C in aufzählender Mengenschreibweise an und berechnen Sie $P(A)$, $P(B)$ und $P(C)$.

b) Verifizieren Sie die Formel

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$$

indem Sie beide Seiten der Gleichung ausrechnen.

c) Geben Sie $\overline{B}$ in aufzählender Mengenschreibweise an und verifizieren Sie die Formel

$$P(\overline{B}) = 1 - P(B),$$

indem Sie beide Seiten der Gleichung ausrechnen.

d) Sie würfeln eine Zahl, die kleiner oder gleich 4 ist, d.h. Ereignis B tritt ein. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Zahl außerdem gerade ist, d.h. dass auch Ereignis C eintritt? Tipp: Benutzen Sie die Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit.

Anwesenheitsaufgaben zu Blatt 12

Aufgabe 1:

Berechnen Sie mit Hilfe der Substitutionsregel $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \cos(x)\cos(\sin(x))\,dx$.

Aufgabe 2:

a) Geben Sie für die folgenden drei Spiele jeweils die Ergebnismengen Ω_a, Ω_b, Ω_c sowie $|\Omega_a|$, $|\Omega_b|$ und $|\Omega_c|$ an.

(i) Spiel a: „Würfeln Sie mit zwei nicht unterscheidbaren Würfeln und schauen Sie auf die möglichen Zahlenpaare der oben liegenden Flächen.“

(ii) Spiel b: „Würfeln Sie mit einem roten und einem blauen Würfel und schauen Sie auf die möglichen Zahlenpaare der oben liegenden Flächen.“

(iii) Spiel c: „Würfeln Sie mit zwei nicht unterscheidbaren Würfeln und schauen Sie auf die Summe der Zahlen auf den oben liegenden Flächen.“

b) Drücken Sie das Ereignis $E = \{$ „die Summe der beiden oben liegenden Zahlen ist 10“ $\}$ für jedes der drei Spiele in Mengenschreibweise aus.

c) Berechnen Sie $P(E)$ für alle drei Spiele, indem Sie jeweils ein Laplace-Modell annehmen. Ist diese Annahme sinnvoll? Begründen Sie Ihre Antwort.