Dr. Susanne Knies, Sarah Eckstein 11.11.2013

Mathematik I für Naturwissenschaftler

WS 2013/14 — Blatt 4

Abgabe: Montag, den 17. November, vor der Vorlesung

Die Übungsblätter finden Sie auch unter
http://home.mathematik.uni-freiburg.de/mfnw/

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Aus der Vorlesung wissen Sie, dass die n-te Fibonacci-Zahl $F_n \in \mathbb{N}$ gegeben ist durch $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n\right) =: \frac{1}{\sqrt{5}}\lambda_+^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\lambda_-^n$.

a) Zeigen Sie, dass gilt: $\lambda_+^{-1} = -\lambda_-$. Tipp: Anwesenheitsaufgabe 5.

b) Für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$ gilt: F_n ist die der Zahl $\frac{1}{\sqrt{5}}\lambda_+^n$ am nächsten gelegene ganze Zahl. Beweisen oder widerlegen Sie diese Aussage.

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Durch die Nuklearunfälle von Fukushima 2011 wurden unter anderem die radioaktiven Stoffe Jod 131 und Cäsium 137 freigesetzt. Die Halbwertszeit beim radioaktiven Zerfall ist die Zeitspanne, in der die Menge und damit auch die Aktivität eines gegebenen Radionuklids durch den Zerfall auf die Hälfte gesunken ist. Jod 131 hat eine Halbwertszeit von 8 Tagen und Cäsium 137 von etwa 30 Jahren.

a) Wieviel Prozent des freigesetzten Jod 131 sind nach acht Wochen noch übrig?

b) Wieviele Jahre dauert es ungefähr, bis nur noch ein Tausendstel der freigesetzten Menge Cäsium 137 übrig ist?

Aufgabe 3: **4 Punkte**

a) Zeigen Sie mit Hilfe des ersten Konvergenzsatzes aus der Vorlesung, dass die Folge $a_n = 3 - \frac{5}{n}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ konvergiert. Geben Sie den Grenzwert a der Folge an.

b) Sei $\varepsilon > 0$ fest gegeben. Wie groß muss n in Abhängigkeit von ε sein, damit gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$?

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Finden sie zur Folge $a_n := \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ drei verschiedene Folgen b_n, so dass gilt:

a) die Folge $\frac{a_n}{b_n}$ ist eine Nullfolge,

b) die Folge $\frac{a_n}{b_n}$ konvergiert gegen 2,

c) die Folge $\frac{a_n}{b_n}$ divergiert.

d) Erklären Sie, warum die gefundenen Beispiele keinen Widerspruch zum zweiten Konvergenzsatz aus der Vorlesung darstellen.

Anwesenheitsaufgaben zu Blatt 4

Aufgabe 1: Begründen Sie, warum die angegebenen Folgen konvergieren bzw. divergieren:

a) $a_n := \begin{cases} n, \text{ falls } 0 \leq n \leq 10000 \\ \frac{n+10000}{n^2}, \text{ falls } 10001 \leq n \end{cases}$

b) $b_n := \begin{cases} n, \text{ falls } n \text{ gerade ist,} \\ \frac{1}{n} \text{ falls } n \text{ ungerade ist.} \end{cases}$

Aufgabe 2:
Eine Bergziege wird um 15 Uhr nachmittags auf 450 Metern Höhe gesehen und um 17 Uhr auf 700 Metern. Nehmen Sie an, dass die Ziege um 12 Uhr mittags gestartet ist und seitdem mit konstanter Geschwindigkeit immer weiter den Berg hinauf klettert. Stellen Sie eine Formel auf, die die Höhe der Ziege in Abhängigkeit der gelaufenen Stunden angibt.

Aufgabe 3:

a) Schreiben Sie $\sum_{n=1}^{10} \frac{(-1)^n}{n}$ explizit als Summe aus.

b) Schreiben Sie $S = 1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+...+(2n+1)$ in der Form $S = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

Aufgabe 4
Betrachten Sie die Folge $a_n := \frac{3n+1}{2n+2}$.

a) Setzen Sie $n = 1000$ ein und stellen Sie eine Vermutung über den Grenzwert a der Folge auf.

b) Rechnen Sie nach, dass a_n tatsächlich gegen den Grenzwert $a = \frac{3}{2}$ konvergiert, indem Sie den Konvergenzsatz 2 aus der Vorlesung benutzen. Sie dürfen verwenden, dass $\frac{1}{2n+2}$ für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 5 (Rationalisierung des Nenners)
Rechnen Sie nach, dass

$$\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$$

gilt. Tipp: Dritte binomische Formel.