Dr. Susanne Knies, Sarah Eckstein 18.11.2013

Mathematik I für Naturwissenschaftler

WS 2013/14 — Blatt 5

Abgabe: Montag, den 25. November, vor der Vorlesung

Die Übungsblätter finden Sie auch unter
http://home.mathematik.uni-freiburg.de/mfnw/

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := 3x^2+4x+5$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $g(x) := 2x^2-1$ definiert.

a) Berechnen Sie $f \circ g$ und $g \circ f$.

b) Finden Sie ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $(f \circ g)(x_0) \neq (g \circ f)(x_0)$. Das bedeutet, dass die Verknüpfung $''\circ''$ nicht kommutativ ist.

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Gegeben seien die Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := 2x + 3$, und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) := (x-1)^2 + 2$.

a) Skizzieren Sie die Funktionen f und g jeweils in einem gesonderten Koordinatensystem.

b) Lesen Sie anhand der Skizzen ab, wie man Definitions- bzw. Wertebereich wählen muss, sodass die Funktionen umkehrbar sind. (Dabei sollen die entsprechenden Intervalle, die Sie für den Definitions- oder Wertebereich auswählen, möglichst groß sein.)

c) Berechnen Sie die Umkehrfunktionen und skizzieren Sie die Grafen in den Koordinatensystemen aus Teil a).

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Frosch Hugo ist ein alter Hase unter den Fröschen und außerdem frisch verliebt. Leider trennt ihn eine 22 Meter breite, dafür aber völlig unbefahrene Straße von seiner neuen Angebeteten. Hugo ist sich sicher, dass sich seine Sprungkraft mit jedem Sprung um 10% verringert. Von früheren Dates weiß er zwar, dass sein dritter Sprung 3,24 Meter weit sein wird, er weiß aber auch, dass er in seinem Alter nur noch maximal acht Sprünge vollführen kann. Hat diese Liebe eine Chance? Begründen Sie Ihre Antwort. Tipp: Kann Hugo die Weite seines ersten Sprungs berechnen?

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Zeigen Sie, dass gilt:

$$0,\overline{9} = 1.$$

Tipp: Überlegen Sie zunächst, dass gilt: $0,\overline{9} = 9 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k$.

Hinweis: Als Alternative zu einer der Aufgaben 1-4 können Sie auch die Knobelaufgabe auf der Rückseite bearbeiten. Falls Sie 5 Aufgaben bearbeiten, werden die 4 besten bewertet.

Knobelaufgabe **4 Punkte**

a) Zeigen Sie, dass $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$ gilt.
Tipp: Blatt 1, Anwesenheitsaufgabe 2.2.

b) Zeigen Sie nun, dass $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq 2$ gilt, indem Sie Teil a) benutzen.

Anwesenheitsaufgaben zu Blatt 5

Aufgabe 1:
Es seien die Funktionen $h(x) := x + 3$, $x \in \mathbb{R}$ und $k(x) := x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

a) Skizzieren Sie h und k. Sind die Funktionen gerade oder ungerade?

b) Wie müssen die Definitionsbereiche für k und h eingeschränkt werden, so dass die Funktionen umkehrbar sind? Was sind dann die Wertebereiche von k und h?

c) Berechnen und skizzieren Sie die Umkehrfunktionen h^{-1} und k^{-1}.

Aufgabe 2: Machen Sie sich anhand des folgenden Bildes klar, dass die Reihe $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots$ den Wert $\frac{1}{3}$ hat. Tipp: Wie groß sind die Flächeninhalte der dunkler eingefärbten Flächen? Und wie groß die der helleren Flächen? Benutzen Sie anschließend die Formel für die geometrische Reihe aus der Vorlesung, um das Resultat zu verifizieren.