Dr. Susanne Knies, Sarah Eckstein 25.11.2013

Mathematik I für Naturwissenschaftler

WS 2013/14 — Blatt 6

Abgabe: Montag, den 02. Dezember, vor der Vorlesung

Die Übungsblätter finden Sie auch unter
http://home.mathematik.uni-freiburg.de/mfnw/

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Finden Sie ein Polynom zweiten Grades, das symmetrisch zur y-Achse ist, an der Stelle $x_0 = 3$ eine Nullstelle besitzt und durch den Punkt $P(0/-12)$ geht.

Aufgabe 2: **6 Punkte**

Gegeben seien die gebrochen rationalen Funktionen $f(x) := \frac{x}{x^2+x-6}$, $g(x) := \frac{2x^2-3x+1}{x^2+x-6}$ und $h(x) := \frac{(x-2)(x+3)(x-4)}{x^2-5x}$.

a) Bestimmen Sie für f, g und h jeweils den Definitionsbereich und berechnen Sie die Nullstellen und die Polstellen der Funktionen. Liegen bei den Polstellen Vorzeichenwechsel vor?

b) Verifizieren Sie, dass für die Funktion h gilt:

$$h(x) = x + 2 + \frac{24}{x^2 - 5x}.$$

c) Geben Sie das asymptotische Verhalten von f, g und h für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ an. Tipp: Benutzen Sie für die Funktion h Teil b).

d) Skizzieren Sie die Schaubilder (ohne GTR!).

Bemerkung: Die Darstellung für h in Teil b) kann man auch selbst berechnen, indem man eine Polynomdivision durchführt.

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Wirft man einen Stein unter Vernachlässigung des Luftwiderstands aus einer Höhe von $1,5$ Metern senkrecht nach oben, so kann man die Höhe des Steins in Abhängigkeit von der Zeit t mit der Formel $H(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 t + 1,5m$ berechnen. Hierbei bezeichnet v_0 die Anfangsgeschwindigkeit des Steins und $g := 9,81\frac{m}{s^2}$ die Gravitationskonstante.

a) Bringen Sie H in Scheitelpunktsform.

b) Geben Sie in Abhängigkeit von v_0 und g die Zeit T an, zu der der Stein wieder auf dem Boden aufkommt.

c) Bestimmen Sie die maximale Höhe, die der Stein erreicht, in Abhängigkeit von v_0. Tipp: Verwenden Sie Aufgabe 2 a) der Anwesenheitsaufgaben.

d) Wann erreicht der Stein bei einer Anfangsgeschwindigkeit von $v_0 = 20\frac{m}{s}$ eine Höhe von 5 Metern?

Aufgabe 4 **2 Punkte**

Lösen Sie die folgenden Gleichungen ohne Taschenrechner nach x auf und vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich:

a) $e^{6x+3\ln 2} = 2$

b) $\ln x^3 - 2\ln x - \ln 5 = 3$

Knobelaufgabe:
In der Vorlesung wurde gezeigt, dass $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)\,\forall\, x,\, y \in \mathbb{R}$ und $\exp(1) = e$ gilt. Folgern Sie allein aus diesen Eigenschaften, dass gilt:

a) $\exp(n) = e^n \;\forall\; n \in \mathbb{N}$,

b) $\exp(\frac{1}{m}) = e^{\frac{1}{m}} \;\forall\; m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

c) $\exp(\frac{n}{m}) = e^{\frac{n}{m}} \;\forall\; n \in \mathbb{N},\, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (hier können Sie b) verwenden).

Sie können Aufgabe 1, 3 oder 4 durch die Knobelaufgabe ersetzen :-)

Anwesenheitsaufgaben zu Blatt 6

Aufgabe 1:
Geben Sie eine Parabel an, deren Nullstellen bei $x = -1$ und $x = 3$ liegen. Ist diese Parabel eindeutig bestimmt?

Aufgabe 2:

a) Gegeben sei die Funktion $f(x) := -x^2 + 2x + 1,\, x \in \mathbb{R}$. Rechnen Sie nach, dass sich f schreiben lässt als $f(x) = -(x-1)^2 + 2$ und lesen Sie aus dieser Darstellung den Scheitelpunkt S von f ab. Geben Sie außerdem die Gleichung der Geraden an, bezüglich derer f symmetrisch ist. Was können Sie daraus über die Lage der Nullstellen (sofern vorhanden) und des Extremwerts der Parabel aussagen?

b) Rechnen Sie nach, dass sich die Funktion $f(x) := ax^2 + bx + c$ mit $a,\, b,\, c \in \mathbb{R},\, a \neq 0$ schreiben lässt als

$$f(x) = a\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 - \frac{b^2}{4a} + c.$$

Bemerkung: Diese Darstellung heißt **Scheitelpunktsform** und kann mittels quadratischer Ergänzung hergeleitet werden.

c) Bringen Sie die Funktion $g(x) := x^2 + 4x + 1$ auf Scheitelpunktsform.