Dr. Susanne Knies, Sarah Eckstein 02.12.2013

Mathematik I für Naturwissenschaftler

WS 2013/14 — Blatt 7

Abgabe: Montag, den 09. Dezember, vor der Vorlesung

Die Übungsblätter finden Sie auch unter

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/mfnw/

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Auf Straßenschildern bedeutet 20% Steigung, dass auf einer horizontal gemessenen Strecke von 1m ein Höhenunterschied von 20cm vorliegt. In welchem Winkel zur Horizontalen steigt eine Straße mit 15% an? Fertigen Sie eine Skizze an und geben Sie Ihr Ergebnis im Grad-Maß an.

Aufgabe 2: **4 Punkte**

a) Es gilt $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 30° = \frac{1}{2}$, $\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Berechnen Sie mit Hilfe der Additionstheoreme $\cos 15°$ und $\sin 75°$.

b) Die Funktionen Sinushyperbolicus und Kosinushyperbolicus sind folgendermaßen definiert:

$$\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}),\ \cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

Zeigen Sie:

(i) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.

(ii) $\cosh(x) = \cosh(-x)$ und $\sinh(-x) = -\sinh(x)$.

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Sei der Umfang der Erde am Äquator mit $U = 40.000$km angenommen; außerdem sei die Erde eine perfekte Kugel.

a) Zeichnen Sie auf einer Skizze, auf der Sie die Erde entlang eines Längenkreises aufschneiden, den 48°. Breitengrad der Nordhalbkugel ein und berechnen Sie seine Länge $U_{48°}$. Übrigens: der 48°. Breitengrad verläuft durch Freiburg und ist unweit des Institutsviertels an der Kreuzung Habsburgerstraße-Ludwigstraße markiert.

b) Können Sie eine Formel herleiten, mit welcher Sie allgemein die Länge U_α der Breitengrade aus dem Umfang der Erde berechnen können?

Aufgabe 4: **4 Punkte**

a) Gegeben sei die Funktion $f(x) := \sin(x^3 e^{5x^2} + 17)$. Begründen Sie, dass f stetig ist, indem Sie wie in Anwesenheitsaufgabe 2 f als Verknüpfung von Funktionen schreiben und Satz 1 (stetige Funktionen) aus der Vorlesung anwenden.

b) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in (-\infty, 1], \\ 3x + a & x \in (1, \infty). \end{cases}$$

Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ so, dass f stetig ist.

Als Alternative zu einer der Aufgaben 1-4 können Sie auch die Knobelaufgabe bearbeiten. Falls Sie 5 Aufgaben bearbeiten, werden die 4 besten bewertet.

Knobelaufgabe **4 Punkte**

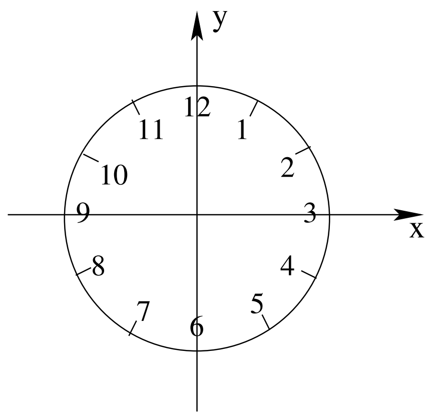
Berechnen Sie unter Verwendung der Additionstheoreme und der Definition des Tangens, dass gilt:

a) $\tan(x + y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$,

b) $\sin(2x) = \frac{2\tan(x)}{1+\tan^2(x)}$.

Anwesenheitsaufgaben zu Blatt 7

Aufgabe 1:
Auf der Skizze ist das Ziffernblatt einer Uhr mit Radius 1 in ein Koordinatensystem eingezeichnet - und zwar so, dass sich der Mittelpunkt der Uhr am Ursprung (0/0) befindet. Die Markierung für 12 Uhr befindet sich also am Punkt (0/1), die für 3 Uhr an (1/0), 6 Uhr an $(0/-1)$ und 9 Uhr an $(-1/0)$. Berechnen Sie ohne Taschenrechner die Koordinaten der restlichen Stundenmarkierungen. Verwenden Sie dabei ausschließlich $\sin 30° = \frac{1}{2}$ und den Satz des Pythagoras.



Bemerkung: Auch $\sin 30° = \frac{1}{2}$ lässt sich ohne Taschenrechner aus dem Satz des Pythagoras berechnen.

Aufgabe 2 Gegeben sei die Funktion $f(x) := e^{\cos(2x+x^2)}$, sowie die Funktionen $h_1(x) := e^x$, $h_2(x) := \cos(x)$, $h_3(x) := 2x$ und $h_4(x) := x^2$.

a) Rechnen Sie nach, dass $h_1(h_2(h_3(x) + h_4(x))) = f(x)$ gilt.

b) Begründen Sie nun mit Satz 1 (stetige Funktionen), dass f stetig ist.